

Fundamentos de Probabilidad y Conteo

Clase 1 — 14.310x: Data Analysis for Social Scientists

B.Sc. Cristian Lazo Quispe

BREIT (Brescia Institute of Technology) · Aporta — Grupo Breca

Programa SDS (Statistics and Data Science, MITx) · **BREIT** (Brescia Institute of Technology), iniciativa de Aporta —Grupo Breca— en alianza con MIT IDSS.
Basado en MIT 14.310x (CC BY-NC-SA 4.0).

✉ clazoq@uni.pe ·  [linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe](https://www.linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe) ·  github.com/CristianLazoQuispe

¿Qué veremos hoy?

- 1 La idea central
- 2 Espacio muestral y eventos
- 3 Los axiomas
- 4 Probabilidad por conteo
- 5 Conteo: combinatoria
- 6 Manos a la obra

Contenido

- 1 La idea central
- 2 Espacio muestral y eventos
- 3 Los axiomas
- 4 Probabilidad por conteo
- 5 Conteo: combinatoria
- 6 Manos a la obra

La pregunta de fondo

¿Cómo le ponemos un número a la incertidumbre?

Ese número es la **probabilidad (probability)**.

Como científicos sociales trabajamos con datos que vienen del azar: a quién toca una encuesta, qué hogar resulta pobre, qué estudiante aprueba.

- Primero necesitamos un **lenguaje** para el azar.
- Tres piezas: **espacio muestral**, **eventos**, **probabilidad**.
- Cuando todo es igualmente probable, calcular probabilidades es **contar**.

Demo: la idea en acción

Problema

Lanzamos una moneda justa **3 veces** y anotamos cara (C) o sello (S). ¿Cuál es la probabilidad de obtener **exactamente dos caras**?

Solución: probabilidad = contar posibilidades

Listamos *todos* los escenarios ($n(S) = 8$):

$$S = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}.$$

Favorables (“exactamente dos caras”): $\{CCS, CSC, SCC\}$, $n(A) = 3$, luego

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

Idea central: qué *fracción* de escenarios nos sirve.

Contenido

- 1 La idea central
- 2 Espacio muestral y eventos**
- 3 Los axiomas
- 4 Probabilidad por conteo
- 5 Conteo: combinatoria
- 6 Manos a la obra

Definiciones básicas

Definición 1 (Espacio muestral (sample space))

S = colección de todos los resultados posibles de un experimento.

Definición 2 (Evento (event))

Un evento A es cualquier subconjunto de S . Si el resultado observado está en A , decimos que A ocurrió.

Operaciones (son conjuntos): unión $A \cup B$ ("A o B"), intersección $A \cap B$ ("A y B"), complemento A^c ("no A").

Ejemplo: una encuesta de hogares

Registramos la condición de pobreza de un hogar:

$$S = \{\text{pobre extremo, pobre no extremo, no pobre}\}.$$

- Evento “el hogar es pobre”: $A = \{\text{pobre extremo, pobre no extremo}\}.$
- Complemento: $A^c = \{\text{no pobre}\}.$

Los tres resultados son **mutuamente excluyentes** (uno solo ocurre) y **exhaustivos** (cubren todo S).

Demo: armar el espacio muestral con un árbol

Problema

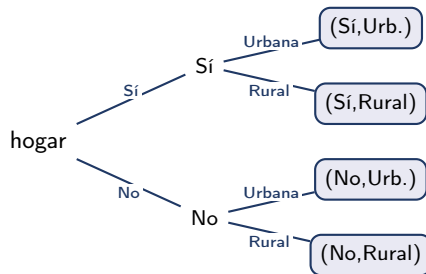
Una encuestadora visita un hogar y registra si tiene acceso a internet (Sí / No) y la zona donde vive (Urbana / Rural). Escribe el espacio muestral S , di cuántos resultados tiene, y expresa el evento $A = \text{"el hogar es rural"}$ como subconjunto de S .

Solución

Cada hogar es un par (internet, zona). Por la **regla del producto**:

$$n(S) = 2 \times 2 = 4.$$

$$A = \{(Sí, Rural), (No, Rural)\}.$$



Contenido

- 1 La idea central
- 2 Espacio muestral y eventos
- 3 Los axiomas**
- 4 Probabilidad por conteo
- 5 Conteo: combinatoria
- 6 Manos a la obra

Axiomas de probabilidad (Kolmogorov)

Una probabilidad $\mathbb{P}$ asigna a cada evento un número y cumple:

- ① $\mathbb{P}(A) \geq 0$ (no negatividad)
- ② $\mathbb{P}(S) = 1$ (normalización)
- ③ Si $A_1, A_2, \dots$ son disjuntos: $\mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ (aditividad)

De aquí se deduce todo lo demás:

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Demo: la regla de la suma (dos programas sociales)

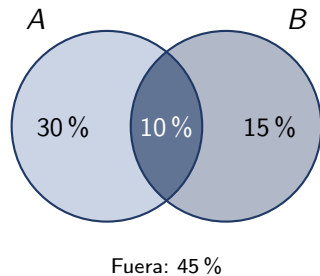
Problema

En un distrito, el 40 % de los hogares recibe el programa A (apoyo alimentario) y el 25 % recibe el programa B (beca escolar); un 10 % recibe **ambos**. Se elige un hogar al azar: ¿probabilidad de recibir **al menos uno** de los dos?

Solución (inclusión-exclusión)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= 0.40 + 0.25 - 0.10 = 0.55.\end{aligned}$$

Ninguno (complemento): $1 - 0.55 = 0.45$.



Contenido

- 1 La idea central
- 2 Espacio muestral y eventos
- 3 Los axiomas
- 4 Probabilidad por conteo**
- 5 Conteo: combinatoria
- 6 Manos a la obra

Si todo es igualmente probable: solo cuenta

Espacio muestral simple

Si los $n(S)$ resultados son igualmente probables:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}.$$

La probabilidad se vuelve un problema de **conteo**: ¿cuántos resultados hay en total y cuántos cumplen lo que pedimos?

Demo: dos dados

Problema

Lanzamos **dos dados justos** de 6 caras y anotamos el par (d_1, d_2) . ¿Cuál es la probabilidad de que la **suma** sea 4?

Solución

Casos totales: $n(S) = 6 \times 6 = 36$.

Casos favorables (suma = 4): $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \Rightarrow n(A) = 3$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Contenido

- 1 La idea central
- 2 Espacio muestral y eventos
- 3 Los axiomas
- 4 Probabilidad por conteo
- 5 Conteo: combinatoria**
- 6 Manos a la obra

Tres reglas para contar

① **Producto:** dos partes con m y n opciones $\Rightarrow m \times n$.

② **Permutaciones** (orden importa): $\frac{N!}{(N-n)!}$.

③ **Combinaciones** (orden no importa): $\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)! n!}$.

La pregunta clave

¿El orden importa? Sí $\rightarrow$ permutación. No $\rightarrow$ combinación.

Demo: canicas (truco del complemento)

Problema

Una urna tiene 5 canicas azules, 3 amarillas y 4 grises (12 en total). Sacamos 4 canicas a la vez (**sin orden, sin reemplazo**). ¿Cuál es la probabilidad de obtener **al menos una azul**?

Solución (por complemento)

Total de grupos: $\binom{12}{4} = 495$. Grupos *sin* ninguna azul (entre las 7 no azules): $\binom{7}{4} = 35$.

$$\mathbb{P}(\geq 1 \text{ azul}) = 1 - \mathbb{P}(\text{ninguna azul}) = 1 - \frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} = 1 - \frac{35}{495} = \frac{460}{495} \approx 0.93.$$

Idea: “al menos uno” casi siempre es más fácil por el **complemento**.

Contenido

- 1 La idea central
- 2 Espacio muestral y eventos
- 3 Los axiomas
- 4 Probabilidad por conteo
- 5 Conteo: combinatoria
- 6 Manos a la obra**

¿Y ahora?

- Revisa el **PDF de teoría** para el detalle y más ejemplos.
- Practica con el **PDF de ejercicios** (3 niveles: Basic · Core · Challenge).
- Verifica con el **PDF de soluciones** paso a paso.
- En **R**: `choose(N, n)` y `factorial(n)` resuelven casi todo conteo.

¡A practicar!