

Variables Aleatorias y Distribuciones Conjuntas

Clase 3 — 14.310x: Data Analysis for Social Scientists

B.Sc. Cristian Lazo Quispe

BREIT (Brescia Institute of Technology) · Aporta — Grupo Breca

Programa SDS (Statistics and Data Science, MITx) · **BREIT** (Brescia Institute of Technology), iniciativa de Aporta —Grupo Breca— en alianza con MIT IDSS.

Basado en MIT 14.310x (CC BY-NC-SA 4.0).

✉ clazoq@uni.pe · [in linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe](https://www.linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe) · github.com/CristianLazoQuispe

¿Qué veremos hoy?

- 1 Repaso: regla de Bayes
- 2 El perro de Oscar
- 3 Variable aleatoria
- 4 Distribuciones: pmf, pdf y cdf
- 5 Distribución conjunta
- 6 Marginales y condicionales
- 7 Demos resueltos
- 8 Manos a la obra

Contenido

- 1 Repaso: regla de Bayes
- 2 El perro de Oscar
- 3 Variable aleatoria
- 4 Distribuciones: pmf, pdf y cdf
- 5 Distribución conjunta
- 6 Marginales y condicionales
- 7 Demos resueltos

Repaso: regla de Bayes

Bayes con una partición $\{A_j\}$ de S

$$\mathbb{P}(A_i | B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B | A_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(B | A_j)}$$

Intuición: damos vuelta el condicionamiento. El denominador es la *probabilidad total* de B (suma sobre todas las causas posibles A_j); cada A_i se “lleva” la fracción de B que explica.

Bayes condicionado a información adicional C

$$\mathbb{P}(A | B \cap C) = \frac{\mathbb{P}(B | A \cap C) \mathbb{P}(A | C)}{\mathbb{P}(B | C)}$$

Intuición: es el mismo Bayes pero *todo* ocurre dentro del mundo en que ya sabemos C . Cada probabilidad se evalúa condicionada a C .

Contenido

- 1 Repaso: regla de Bayes
- 2 El perro de Oscar
- 3 Variable aleatoria
- 4 Distribuciones: pmf, pdf y cdf
- 5 Distribución conjunta
- 6 Marginales y condicionales
- 7 Demos resueltos

El perro de Oscar: problema

Problema

El perro de Oscar se perdió. Pudo irse al **bosque A** (prior $\mathbb{P}(A) = 0.4$) o al **bosque B** (prior $\mathbb{P}(B) = 0.6$).

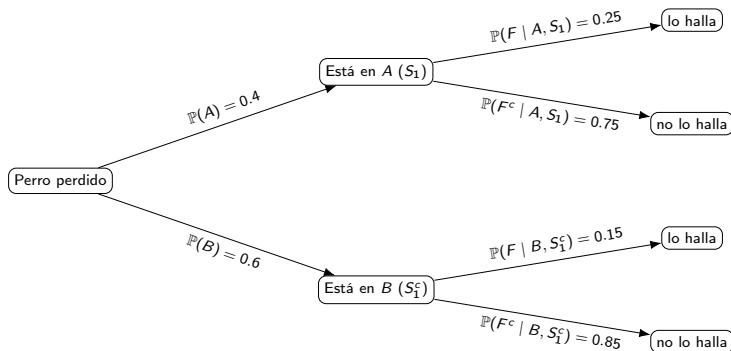
Si Oscar busca en el bosque *correcto*, lo encuentra con probabilidad 0.25 si está en *A* y 0.15 si está en *B* (puede no verlo aunque esté ahí).

Se pide:

- (a) Dibujar el árbol de probabilidad.
- (b) ¿En qué bosque conviene **buscar el día 1**?
- (c) Si buscó en *A* el día 1 y **no lo encontró**, ¿cuál es la probabilidad de que el perro *esté en A*?

El perro de Oscar: solución I

(a) **Árbol de probabilidad.** Notación: S_1 = “busca en A el día 1”; F = “lo encuentra”. Priors en el primer nivel; tasa de éxito al buscar en el bosque correcto en el segundo.



El perro de Oscar: solución II

(b) ¿Dónde buscar el día 1? Comparamos la probabilidad de *encontrarlo* si se busca en cada bosque (prior $\times$ tasa de éxito):

$$\underbrace{\mathbb{P}(A) \cdot 0.25}_{0.4 \cdot 0.25 = 0.10} > \underbrace{\mathbb{P}(B) \cdot 0.15}_{0.6 \cdot 0.15 = 0.09} \implies \boxed{\text{buscar en el bosque A.}}$$

(c) **Buscó en A y no lo encontró:** $\mathbb{P}(A \mid F^c)$. Por Bayes, el perro *no* aparece en A si está en A y no lo vio (0.75), o si directamente está en B (no podía aparecer en A, prob. 1):

$$\mathbb{P}(A \mid F^c) = \frac{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}(F^c \mid A)}{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}(F^c \mid A) + \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(F^c \mid B)} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{0.4 \cdot 0.75 + 0.6 \cdot 1} = \frac{0.30}{0.90} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Idea: no hallarlo en A *baja* la creencia de que esté en A (de 0.4 a $1/3$), pero no la elimina: pudo estar ahí y no verlo.

Contenido

- 1 Repaso: regla de Bayes
- 2 El perro de Oscar
- 3 Variable aleatoria**
- 4 Distribuciones: pmf, pdf y cdf
- 5 Distribución conjunta
- 6 Marginales y condicionales
- 7 Demos resueltos

De eventos a números

La idea

Casi nunca nos interesa el resultado “crudo” del azar, sino una **característica numérica** de él: años de educación, ingreso del hogar, tamaño del hogar, tiempo hasta encontrar empleo.

Definición 1 (Variable aleatoria (random variable))

*Una **variable aleatoria** X es una función de valor real cuyo dominio es el espacio muestral S : a cada resultado $s \in S$ le asigna un número $X(s) \in \mathbb{R}$.*

Ojo

No es “variable” ni “aleatoria”: es una **función**. Lo aleatorio es el resultado s ; X solo lo traduce a un número.

Discreta vs. continua

Definición 2 (Discreta / continua)

X es **discreta** si toma valores aislados, contables $(0, 1, 2, \dots)$. X es **continua** si puede tomar cualquier valor de un intervalo de $\mathbb{R}$.

Discretas

- Tamaño del hogar
- Número de hijos
- Número de intentos hasta aprobar

Continuas

- Ingreso mensual (≥ 0)
- Tiempo hasta hallar empleo
- Duración de un episodio de pobreza

Demo: una v.a. discreta concreta

Problema

En una encuesta se anota $X =$ **número de hijos** de una mujer (suponemos

$X \in \{0, 1, 2, 3\}$), con pmf

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	0.20	0.40	0.30	0.10

Se pide: (a) verificar que es una pmf válida; (b) calcular $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

Solución

(a) Todos los $f_X(x) \in [0, 1]$ y suman $0.20 + 0.40 + 0.30 + 0.10 = 1.00$ (✓): es una pmf válida.

(b) “Al menos 2 hijos” es $\{X = 2\} \cup \{X = 3\}$, así que sumamos:
 $\mathbb{P}(X \geq 2) = f_X(2) + f_X(3) = 0.30 + 0.10 = \boxed{0.40}$.

Contenido

- 1 Repaso: regla de Bayes
- 2 El perro de Oscar
- 3 Variable aleatoria
- 4 Distribuciones: pmf, pdf y cdf**
- 5 Distribución conjunta
- 6 Marginales y condicionales
- 7 Demos resueltos

Variable discreta: la pmf

Definición 3 (Función de probabilidad (pmf))

Si X es discreta, su **probability mass function** es $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$.

Una pmf válida cumple

$$(i) \quad 0 \leq f_X(x_i) \leq 1, \quad (ii) \quad \sum_i f_X(x_i) = 1.$$

Y la probabilidad de un evento se obtiene **sumando**: $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f_X(x_i)$.

Demo: adultos que trabajan en el hogar

Con $f_X(0, 1, 2, 3) = (0.10, 0.35, 0.40, 0.15)$: suma = 1 (✓). Entonces $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - 0.10 = 0.90$.

Variable continua: la pdf

Para una v.a. continua, $\mathbb{P}(X = x) = 0$. La probabilidad se asigna a **intervalos** vía integrales.

Definición 4 (Función de densidad (pdf))

X es continua si existe $f_X \geq 0$ tal que

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

Una pdf válida cumple

$$(i) \quad f_X(x) \geq 0, \quad (ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

La pmf *suma* a 1; la pdf *integra* a 1. La probabilidad es el **área bajo la curva**.

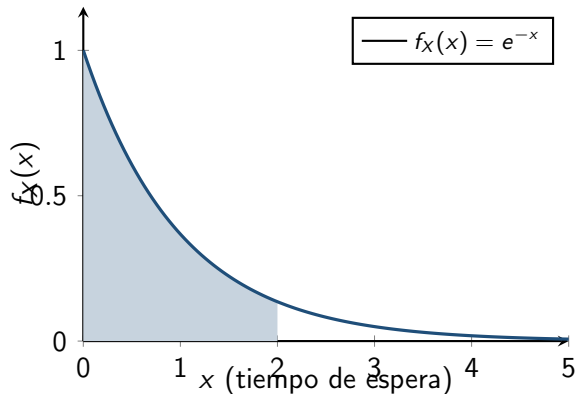
Una densidad puede pasar de 1: el área no

Cuidado

$f_X(x)$ *no* es una probabilidad, es una **densidad** (probabilidad por unidad de x). Puede ser > 1 . Lo que vale exactamente 1 es el **área** total.

Ejemplo: la exponencial $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$) modela tiempos de espera. Con $\lambda = 1$, el área sombreada es

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = 1 - e^{-2} \approx 0.865.$$



La función de distribución acumulada (cdf)

Definición 5 (cdf)

Para cualquier v.a. (discreta o continua): $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Su gran ventaja: **misma definición** en ambos casos. Es no decreciente, con $F_X(-\infty) = 0$ y $F_X(+\infty) = 1$.

Relación cdf $\leftrightarrow$ pmf/pdf

- **Discreta:** $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$ — una *escalera*; cada salto es la pmf.
- **Continua:** $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ y, recíprocamente, $f_X(x) = F'_X(x)$.

Demo: una pdf triangular $f_X(x) = 2x$

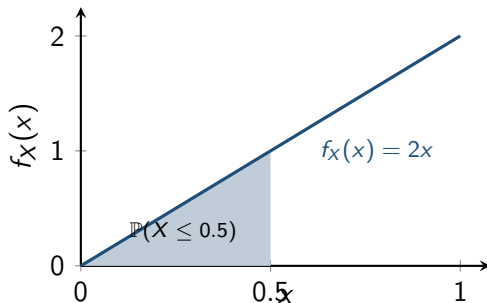
Problema

Sea X continua con densidad $f_X(x) = 2x$ en $0 \leq x \leq 1$ (y $f_X = 0$ fuera). Se pide: **(a)** verificar que es una pdf válida (integra a 1); **(b)** calcular $\mathbb{P}(X \leq 0.5)$.

Solución

(a) $f_X \geq 0$ en $[0, 1]$ y $\int_0^1 2x \, dx = [x^2]_0^1 = 1$ (✓).

(b) Es el área bajo la curva hasta 0.5:
 $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} 2x \, dx = [x^2]_0^{0.5} = \boxed{0.25}$.



Área sombreada = 0.25.

Contenido

- 1 Repaso: regla de Bayes
- 2 El perro de Oscar
- 3 Variable aleatoria
- 4 Distribuciones: pmf, pdf y cdf
- 5 Distribución conjunta**
- 6 Marginales y condicionales
- 7 Demos resueltos

Dos variables a la vez

Muchas preguntas relacionan *dos* variables: ingreso y educación, lluvia y rendimiento agrícola, gasto en salud y edad.

Definición 6 (Densidad conjunta (joint pdf))

Para X, Y continuas, la superficie $f_{XY}(x, y) \geq 0$ cumple, para toda región A del plano,

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \iint_A f_{XY}(x, y) dx dy.$$

Propiedades

$$f_{XY}(x, y) \geq 0, \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x, y) dx dy = 1.$$

(Discretas: pmf conjunta $f_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.)

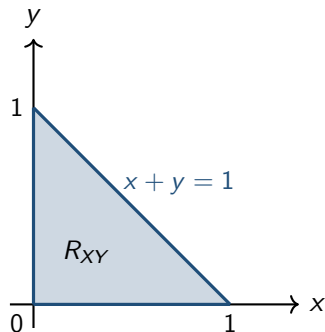
La región de soporte R_{XY}

Definición 7 (Soporte R_{XY})

Conjunto de puntos donde $f_{XY}(x, y) > 0$.
Fuera de R_{XY} la densidad es 0, así que
 toda integral se hace solo sobre R_{XY} .

Lo difícil es la región

El error más común no está en integrar,
sino en **poner los límites**. Siempre *dibuja*
 R_{XY} antes de integrar.



Soporte triangular

$$R_{XY} = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Contenido

- 1 Repaso: regla de Bayes
- 2 El perro de Oscar
- 3 Variable aleatoria
- 4 Distribuciones: pmf, pdf y cdf
- 5 Distribución conjunta
- 6 Marginales y condicionales**
- 7 Demos resueltos

Recuperar una variable: marginales

La **marginal** de X “borra” a Y (integra o suma sobre todos sus valores).

Distribuciones marginales

Continuas: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx.$

Discretas: $f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x, y), \quad f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x, y).$

Intuición

A la marginal de X “no le importa” qué valor tomó Y : por eso barre *todos* los valores de Y . Es la versión continua de la probabilidad total.

Condicionales: la densidad condicional

Definición 8 (Densidad condicional)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0.$$

Con x fijo, vista como función de y , es una pdf (≥ 0 e integra a 1).

Intuición

Fijar $X = x$ es “recortar” la conjunta en ese valor y **renormalizar** (dividir entre $f_X(x)$) para que el corte vuelva a sumar/integrar a 1.

Independencia

Independencia

X e Y son **independientes** si y solo si la conjunta se factoriza:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \text{para todo } (x, y).$$

Equivale a $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$: conocer X no cambia a Y .

El soporte delata la dependencia

Si R_{XY} no es un rectángulo (intervalo en x por intervalo en y), las variables **no pueden** ser independientes.

Demo: una marginal por integración (conjunta uniforme $f_{XY} = 2$)

Problema

Sean X, Y continuas con densidad conjunta *constante*

$f_{XY}(x, y) = 2$ sobre el triángulo

$R_{XY} = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ (y 0 fuera). Se pide: **(a)** la marginal $f_X(x)$; **(b)** la condicional $f_{Y|X}(y|x)$.

Solución

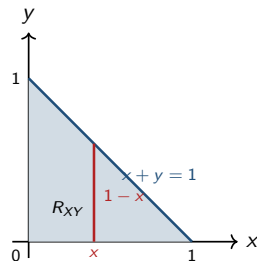
(a) Fijado $x \in [0, 1]$, y recorre $[0, 1 - x]$:

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2 \, dy = 2(1 - x).$$

(b) Dividimos la conjunta entre la marginal:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{2}{2(1-x)} = \boxed{\frac{1}{1-x}} \quad (0 \leq y \leq 1 - x).$$

Uniforme en $[0, 1 - x]$: fijado x , todo y admisible es igual de probable.



Para x fijo, y va de 0 a $1 - x$ (corte rojo).

Contenido

- 1 Repaso: regla de Bayes
- 2 El perro de Oscar
- 3 Variable aleatoria
- 4 Distribuciones: pmf, pdf y cdf
- 5 Distribución conjunta
- 6 Marginales y condicionales
- 7 Demos resueltos**

Demo 1: hallar la constante c (conjunta c_{xy})

Problema

Sean X, Y continuas con densidad conjunta $f_{XY}(x, y) = c xy$ en el cuadrado $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ (y $f_{XY} = 0$ fuera). Se pide: **(a)** hallar c ; **(b)** obtener las marginales f_X, f_Y ; **(c)** decidir si X e Y son *independientes*.

(a) Constante — imponemos que la densidad integre a 1:

$$\iint c xy \, dx \, dy = c \left(\int_0^1 x \, dx \right) \left(\int_0^1 y \, dy \right) = c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{c}{4} = 1 \implies \boxed{c = 4}.$$

(b) Marginales: $f_X(x) = \int_0^1 4xy \, dy = 2x$ y, por simetría, $f_Y(y) = 2y$.

(c) ¿Independientes?

$f_X(x) f_Y(y) = (2x)(2y) = 4xy = f_{XY}(x, y)$. Soporte rectangular $\Rightarrow$ **sí son independientes**.

Demo 2: densidad sobre un triángulo $f_{XY} = cx + 1$ (enunciado)

Problema

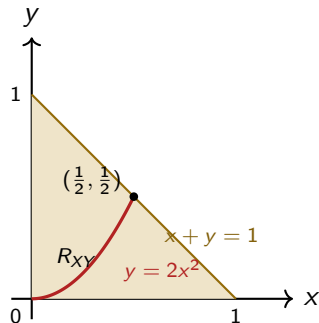
Sean X, Y continuas con densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = cx + 1$$

sobre el triángulo

$R_{XY} = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\}$ (vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$), y $f_{XY} = 0$ fuera.

Se pide: **(a)** hallar la constante c ; **(b)** calcular la probabilidad $\mathbb{P}(Y < 2X^2)$.



Soporte triangular y curva $y = 2x^2$ (región $\{Y < 2X^2\}$ bajo la parábola).

Demo 2: solución (c y $\mathbb{P}(Y < 2X^2)$)

(a) **Constante c** — integramos sobre el triángulo (y de 0 a $1 - x$, luego x de 0 a 1) e igualamos a 1:

$$\int_0^1 (cx + 1)(1 - x) dx = \frac{c}{6} + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 1 \implies \boxed{c = 3}, \quad \text{así } f_{XY}(x, y) = 3x + 1.$$

(b) **Probabilidad $\mathbb{P}(Y < 2X^2)$** — la parábola $y = 2x^2$ corta a la recta $x + y = 1$ en $x = \frac{1}{2}$ (resolver $2x^2 = 1 - x$). El “techo” en y es $2x^2$ si $x < \frac{1}{2}$ y $1 - x$ si $x > \frac{1}{2}$, así que partimos la integral en dos:

$$\mathbb{P}(Y < 2X^2) = \int_0^{1/2} \int_0^{2x^2} (3x+1) dy dx + \int_{1/2}^1 \int_0^{1-x} (3x+1) dy dx = \frac{17}{96} + \frac{36}{96} = \boxed{\frac{53}{96}} \approx 0.552.$$

Contenido

- 1 Repaso: regla de Bayes
- 2 El perro de Oscar
- 3 Variable aleatoria
- 4 Distribuciones: pmf, pdf y cdf
- 5 Distribución conjunta
- 6 Marginales y condicionales
- 7 Demos resueltos

¿Y ahora?

- Revisa el **PDF de teoría** para el detalle y más ejemplos (pmf, pdf, cdf, conjuntas, marginales, condicionales).
- Practica con el **PDF de ejercicios** (3 niveles: Basic · Core · Challenge).
- Verifica con el **PDF de soluciones** paso a paso.
- Truco infalible: ante una conjunta, **dibuja R_{XY} primero**; los límites de integración salen de ahí.

¡A practicar!