

14.310x – Data Analysis for Social Scientists

MicroMasters en Statistics and Data Science (SDS) – MITx

BREIT (Brescia Institute of Technology) · Aporta — Grupo Breca

Clase 4

Esperanza, Varianza y Momentos

Ejercicios (5 niveles)

Módulos oficiales del MicroMaster:

M4 – Functions of Random Variables; Expectation, Variance & Intro to Regression (momentos, covarianza, correlación)

B.Sc. Cristian Lazo Quispe

✉ clazoq@uni.pe

[in linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe](https://www.linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe) · github.com/CristianLazoQuispe

Material del *Advanced Program in Data Science & Global Skills*, diseñado y desarrollado por **BREIT (Brescia Institute of Technology)**, iniciativa de **Aporta** —plataforma de innovación e impacto social del **Grupo Breca**— en alianza con el **MIT IDSS** (Institute for Data, Systems, and Society).

Basado en MIT 14.310x (E. Duflo & S. Ellison) y en diversas fuentes abiertas (ver bibliografía al final), bajo licencia CC BY-NC-SA 4.0.

11 de agosto de 2026

Niveles de dificultad (*difficulty levels*)

Cada problema está rotulado por color según su nivel, de lo más accesible (Nivel 1) a lo más difícil (Nivel 5). Empieza por donde te sientas cómodo y avanza a tu ritmo; los niveles 4–5 son extensiones para profundizar, no un requisito.

- **Nivel 1 – Fundamentos:** calentamiento muy guiado; para quien parte de casi cero.
- **Nivel 2 – Núcleo:** el nivel objetivo del curso/examen.
- **Nivel 3 – Aplicación:** combina varias ideas en contexto realista.
- **Nivel 4 – Reto:** difícil, integra varios temas.
- **Nivel 5 – Reto+:** muy difícil / fuera del scope típico.

Indicaciones

Resuelve los ejercicios de tu nivel; si terminas, sube al siguiente (ver la leyenda de arriba). Recuerda: la *esperanza* es lineal (no necesita independencia), pero la *varianza* de una suma sí; usa el atajo $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ y verifica siempre las unidades.

1. Problemas

Nivel 1 – Fundamentos (warm-up)

Para quien parte de casi cero: cálculos directos y guiados.

Ejercicio 1.1 (Esperanza de una pmf en tabla). El número de hijos X por hogar en una encuesta tiene la pmf:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.10	0.25	0.35	0.20	0.10

Calcula el número esperado de hijos $\mathbb{E}[X]$.

Ejercicio 1.2 (Esperanza paso a paso de una pmf de dos valores). Una máquina expendedora falla con probabilidad 0.2. Sea $X = 1$ si falla y $X = 0$ si no.

- (a) Escribe la pmf de X (los dos valores y sus probabilidades).
- (b) Calcula $\mathbb{E}[X]$ multiplicando cada valor por su probabilidad y sumando.

(Problema nuevo de calentamiento.)

Ejercicio 1.3 (Esperanza y varianza de una pmf). El número X de personas que trabajan en un hogar tiene pmf $p(0) = 0.2$, $p(1) = 0.5$, $p(2) = 0.3$.

- (a) Calcula $\mathbb{E}[X]$.
- (b) Calcula $\mathbb{E}[X^2]$ y luego $\text{Var}(X)$.
- (c) Da la desviación estándar σ .

Ejercicio 1.4 (Varianza paso a paso de una pmf de tres valores). El número X de café que toma una persona al día tiene pmf $p(0) = 0.5$, $p(1) = 0.4$, $p(2) = 0.1$.

- (a) Calcula $\mathbb{E}[X]$.
- (b) Calcula $\mathbb{E}[X^2]$.
- (c) Usa el atajo $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ para hallar $\text{Var}(X)$.

(Problema nuevo de calentamiento; practica el atajo de la varianza.)

Ejercicio 1.5 (Linealidad de la esperanza: $\mathbb{E}[aX + b]$ guiado). Sea X una variable con $\mathbb{E}[X] = 4$. Define $Y = 3X + 5$.

- (a) Recuerda la regla $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$. Identifica a y b .
- (b) Calcula $\mathbb{E}[Y]$.

(Problema nuevo de calentamiento: linealidad pura, sin varianza.)

Ejercicio 1.6 (Linealidad de la esperanza). Una persona tiene un ingreso aleatorio X (en soles) con $\mathbb{E}[X] = 1\,500$ y $\text{Var}(X) = 200^2 = 40\,000$. Recibe un bono fijo de 300 soles y, además, le suben el sueldo un 10 %, de modo que su nuevo ingreso es $Y = 1.1X + 300$.

- (a) Calcula $\mathbb{E}[Y]$.
- (b) Calcula $\text{Var}(Y)$ y $\text{SD}(Y)$.

Ejercicio 1.7 (Esperanza de una uniforme discreta (un dado)). Se lanza un dado justo; sea X el número que sale ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, cada uno con probabilidad $\frac{1}{6}$).

- (a) Calcula $\mathbb{E}[X]$.
- (b) Calcula $\mathbb{E}[X^2]$ y luego $\text{Var}(X)$.

Ejercicio 1.8 (LOTUS con una v.a. discreta). Sea X el resultado de un dado justo ($\mathbb{E}[X] = 3.5$). Defines la “recompensa” $g(X) = 2X + 1$ (en soles).

- (a) Calcula $\mathbb{E}[g(X)]$ de dos maneras: por linealidad y por LOTUS (sumando $g(x)f_X(x)$).

Ejercicio 1.9 (LOTUS con $g(X) = X^2$). El número X de quejas diarias en una oficina tiene pmf $p(0) = 0.5$, $p(1) = 0.3$, $p(2) = 0.2$.

- (a) Usando LOTUS, calcula $\mathbb{E}[X^2]$.

(b) Calcula $\text{Var}(X)$.

Ejercicio 1.10 (Esperanza de una variable Bernoulli). Sea X una variable indicadora: $X = 1$ si una persona encuestada tiene seguro de salud (con probabilidad $p = 0.7$) y $X = 0$ si no.

(a) Calcula $\mathbb{E}[X]$.

(b) Calcula $\text{Var}(X)$ y comprueba la fórmula general $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.

Nivel 2 – Núcleo (core)

El nivel objetivo del curso/examen; todos deberían llegar aquí.

Ejercicio 1.11 (Esperanza de un juego (¿es justo?)). En una rifa benéfica pagas 2 soles por un boleto. Con probabilidad 0.01 ganas 100 soles y con probabilidad 0.99 no ganas nada. Sea G la *ganancia neta* (premio menos costo).

(a) Escribe la pmf de G y calcula $\mathbb{E}[G]$.

(b) ¿El juego es “justo” (esperanza cero) para el jugador?

Ejercicio 1.12 (Media vs. mediana en ingresos). En un pueblito de 5 hogares, los ingresos mensuales (en soles) son 1 000, 1 200, 1 400, 1 500 y 20 000 (un hogar muy rico).

(a) Calcula el ingreso *promedio* (media).

(b) Calcula la *mediana*.

(c) ¿Cuál describe mejor “al hogar típico” y por qué?

Ejercicio 1.13 (Comparar dispersión con la desviación estándar). Dos regiones tienen el mismo ingreso promedio, pero distinta dispersión. En la región A, $\text{Var}(X_A) = 300^2$; en la B, $\text{Var}(X_B) = 750^2$ (soles²).

(a) Da la desviación estándar de cada región.

(b) ¿En cuál el ingreso es más desigual (más disperso)?

Ejercicio 1.14 ($\mathbb{E}[X]$. y $\text{Var}(X)$ de una uniforme continua] El tiempo de atención X (en minutos) en una ventanilla es uniforme en $[0, 10]$, con densidad $f(x) = \frac{1}{10}$ en ese intervalo.

(a) Calcula $\mathbb{E}[X]$.

(b) Calcula $\mathbb{E}[X^2]$ y luego $\text{Var}(X)$.

Ejercicio 1.15 ($\mathbb{E}[X]$. y $\text{Var}(X)$ de una densidad lineal] Los años de educación (reescalados) X tienen densidad $f(x) = \frac{1}{8}x$ en $[0, 4]$ (y 0 fuera).

(a) Calcula $\mathbb{E}[X]$.

(b) Calcula $\mathbb{E}[X^2]$ y luego $\text{Var}(X)$.

Ejercicio 1.16 ($\mathbb{E}[X]$ y $\text{Var}(X)$ de una exponencial). El tiempo X (en meses) hasta conseguir empleo es exponencial con $\lambda = \frac{1}{4}$, es decir $f(x) = \frac{1}{4}e^{-x/4}$ para $x \geq 0$.

(a) Usando que $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ y $\mathbb{E}[X^2] = 2/\lambda^2$, calcula $\mathbb{E}[X]$ y $\text{Var}(X)$.

Ejercicio 1.17 (Densidad triangular). Sea X con densidad $f(x) = 2x$ en $[0, 1]$ (y 0 fuera) — una densidad triangular que favorece valores altos.

(a) Calcula $\mathbb{E}[X]$.

(b) Calcula $\mathbb{E}[X^2]$ y luego $\text{Var}(X)$.

Ejercicio 1.18 (Función $Y = \sqrt{X}$ por LOTUS). Sea $X \sim \text{Unif}[0, 1]$ y $Y = \sqrt{X}$.

(a) Calcula $\mathbb{E}[Y]$ por LOTUS.

(b) Calcula $\mathbb{E}[Y^2]$ por LOTUS y deduce $\text{Var}(Y)$.

Ejercicio 1.19 (Esperanza de una combinación lineal). Un hogar tiene dos fuentes de ingreso: X (sueldo) con $\mathbb{E}[X] = 1800$ e Y (negocio) con $\mathbb{E}[Y] = 600$ soles. El gasto fijo mensual es de 500 soles. El ahorro es $A = X + Y - 500$.

(a) Calcula $\mathbb{E}[A]$.

(b) Si el Estado les transfiere además un subsidio que duplica el ingreso del negocio (de modo que ahora $A' = X + 2Y - 500$), calcula $\mathbb{E}[A']$.

Ejercicio 1.20 ($\text{Var}(aX + b)$: estandarizar una variable). Sea X con $\mathbb{E}[X] = 50$ y $\text{Var}(X) = 25$. Definimos la variable *estandarizada* $Z = \frac{X - 50}{5}$.

(a) Calcula $\mathbb{E}[Z]$.

(b) Calcula $\text{Var}(Z)$.

Nivel 3 – Aplicación

Combina dos o más ideas en contexto realista; consolida lo aprendido.

Ejercicio 1.21 (Covarianza de una conjunta discreta). Dos v.a. $X \in \{0, 1\}$ (¿la persona estudió técnica?) e $Y \in \{0, 1\}$ (¿está empleada?) tienen la pmf conjunta:

$f(x, y)$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0.30	0.20
$X = 1$	0.10	0.40

- (a) Halla las marginales y calcula $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$.
- (b) Calcula $\mathbb{E}[XY]$ y luego $\text{Cov}(X, Y)$.
- (c) ¿El signo de la covarianza tiene sentido?

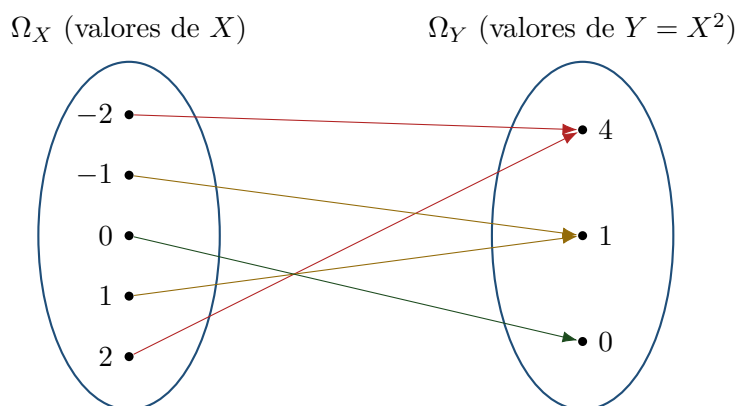
Ejercicio 1.22 ($\mathbb{E}[Y]$. con $Y = X^2$ por LOTUS y por cdf] Sea $X \sim \text{Unif}[0, 1]$ (densidad $f(x) = 1$ en $[0, 1]$) y $Y = X^2$.

- (a) Calcula $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2]$ directamente por LOTUS.
- (b) Halla la densidad $f_Y(y)$ por el método de la cdf y recalcula $\mathbb{E}[Y]$ integrando $\int y f_Y(y) dy$. Comprueba que coinciden.

Ejercicio 1.23 (Cuarta variable: combinación con varianzas independientes). Una empresa tiene tres sucursales con ventas diarias *independientes* X_1, X_2, X_3 , cada una con $\mathbb{E}[X_i] = 1\,000$ y $\text{Var}(X_i) = 200^2 = 40\,000$ soles². Sea $T = X_1 + X_2 + X_3$ la venta total.

- (a) Calcula $\mathbb{E}[T]$.
- (b) Calcula $\text{Var}(T)$ y $\text{SD}(T)$.

Ejercicio 1.24 (De Ω_X a Ω_Y : una v.a. es una función (caso discreto)). Una v.a. X —el *error de pronóstico* de un indicador, en unidades enteras— toma valores en el espacio muestral $\Omega_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, cada uno con probabilidad $\frac{1}{5}$. Define $Y = X^2$ (el *error cuadrático*).



- (a) ¿Cuál es el espacio muestral Ω_Y de Y ?
- (b) Halla la pmf de Y , $p_Y(y)$, y verifica que $\sum_y p_Y(y) = 1$.
- (c) Explica, mirando el diagrama, por qué $Y = g(X)$ es una *función* de Ω_X a Ω_Y y por qué las probabilidades *se suman* al mapear.
- (d) Calcula $\mathbb{E}[Y]$ y observa que coincide con $\text{Var}(X)$. ¿Por qué?

Ejercicio 1.25 (Covarianza y correlación de una densidad conjunta continua). Sea $f(x, y) = x + y$ para $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ (y 0 fuera).

- (1) Halla las marginales y calcula $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$.
- (2) Calcula $\mathbb{E}[XY]$ y $\text{Cov}(X, Y)$.
- (3) Calcula la correlación ρ_{XY} .

Ejercicio 1.26 ($\text{Var}(X+Y)$ con covarianza no nula). Sea de nuevo $f(x, y) = x + y$ en $[0, 1]^2$. Del ejercicio anterior: $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \frac{11}{144}$ y $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{144}$.

- (1) Calcula $\text{Var}(X + Y)$ usando $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$.
- (2) ¿Por qué sería un error usar $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ aquí?

Ejercicio 1.27 (Covarianza con propiedades de la suma). Sean X, Y con $\text{Var}(X) = 4$, $\text{Var}(Y) = 9$ y $\text{Cov}(X, Y) = -2$. Considera $U = 2X + Y$ y $W = X - Y$.

- (1) Calcula $\text{Var}(U)$.
- (2) Calcula $\text{Var}(W)$.
- (3) Calcula $\text{Cov}(U, W)$ usando bilinealidad de la covarianza.

Ejercicio 1.28 (Correlación de una transformación lineal). Sean X, Y con $\rho_{XY} = 0.8$. Define $U = 3X + 5$ y $V = -2Y + 1$.

- (1) Calcula $\text{Cov}(U, V)$ en términos de $\text{Cov}(X, Y)$.
- (2) Calcula ρ_{UV} (la correlación entre U y V).

Ejercicio 1.29 (Coeficientes de regresión a partir de momentos). En una muestra grande se estima $\mu_X = 10$ (años de educación), $\mu_Y = 1\,500$ (ingreso), $\sigma_X = 3$, $\sigma_Y = 900$ y $\rho_{XY} = 0.6$.

- (1) Calcula la pendiente β y el intercepto α de la mejor predicción lineal de Y sobre X .
- (2) Predice el ingreso de alguien con 14 años de educación.
- (3) Interpreta β (¿asociación o causalidad?).

Ejercicio 1.30 ($\mathbb{E}[XY]$. desde la conjunta: ¿bastan las marginales?) En un programa, $X = 1$ si un joven *aprobó* la capacitación (si no, 0) e $Y = 1$ si *consiguió empleo* (si no, 0). La distribución **conjunta** es:

$p(x, y)$	$Y = 0$	$Y = 1$	p_X
$X = 0$	0.40	0.10	0.50
$X = 1$	0.20	0.30	0.50
p_Y	0.60	0.40	1

- (a) Calcula $\mathbb{E}[XY]$ a partir de la conjunta.
- (b) Calcula $\mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$ usando solo las marginales. ¿Coincide con $\mathbb{E}[XY]$?

- (c) Calcula $\text{Cov}(X, Y)$ y $\text{Corr}(X, Y)$ e interpreta.
- (d) **Conceptual:** si *solo* te dieran las marginales (las columnas/filas de los márgenes), ¿podrías calcular $\mathbb{E}[XY]$? ¿En qué caso sí?

Nivel 4 – Reto

Difícil: integra varios temas en un mismo problema.

Ejercicio 1.31 (Independencia $\Rightarrow \text{Cov} = 0$ (demostración)). Sean X e Y independientes, continuas, con densidades f_X, f_Y y densidad conjunta $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

- (1) Demuestra que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
- (2) Concluye que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Ejercicio 1.32 (Contraejemplo: $\text{Cov} = 0$ sin independencia). Sea X una variable simétrica alrededor de 0 con $\mathbb{E}[X] = 0$ y $\mathbb{E}[X^3] = 0$ (por ejemplo $X \sim \text{Unif}[-1, 1]$). Define $Y = X^2$. Claramente Y depende por completo de X (no son independientes).

- (1) Calcula $\text{Cov}(X, Y)$.
- (2) Explica por qué esto no contradice nada de lo visto.

(Idea inspirada en hanmochen, Probability-Theory-2020-Autumn, HW4.)

Ejercicio 1.33 (Método de la cdf para $Y = g(X)$ no monótona). Sea $X \sim \text{Unif}[-2, 2]$, es decir $f_X(x) = \frac{1}{4}$ en $[-2, 2]$, y $Y = X^2$.

- (1) Determina el soporte inducido de Y y halla $F_Y(y)$.
- (2) Deriva $f_Y(y)$.
- (3) Calcula $\mathbb{E}[Y]$ por LOTUS y verifica con $\int y f_Y(y) dy$.

Ejercicio 1.34 (Densidad conjunta sobre un triángulo: covarianza). Sea $f(x, y) = 2$ sobre el triángulo $R = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ (y 0 fuera). (Es la densidad uniforme sobre ese triángulo; ya vimos que $f_X(x) = 2(1 - x)$ en $[0, 1]$.)

- (1) Calcula $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[X^2]$ (por simetría, lo mismo para Y).
- (2) Calcula $\mathbb{E}[XY]$ y luego $\text{Cov}(X, Y)$.
- (3) ¿El signo de $\text{Cov}(X, Y)$ tiene sentido geométrico?

Ejercicio 1.35 (Esperanza iterada y ley de varianza total). En una ciudad, el número diario de quejas X que recibe una oficina depende de la zona Y de donde proviene la persona. Con probabilidad 0.6 la persona es *urbana* ($Y = u$) y entonces $X | Y = u \sim \text{Pois}(8)$; con probabilidad 0.4 es *rural* ($Y = r$) y $X | Y = r \sim \text{Pois}(3)$. Recuerda que para una Poisson la media y la varianza coinciden con su parámetro.

- (1) Usando la **ley de esperanza iterada** $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]]$, calcula $\mathbb{E}[X]$.
- (2) Usando la **ley de varianza total** $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X | Y])$, calcula $\text{Var}(X)$.
- (3) Interpreta cada uno de los dos términos de la varianza (variación *dentro* de cada zona vs. variación *entre* zonas).

(Adaptado de MIT 18.05, Class 6 —expectation y variance— y de la idea de mezcla condicional.)

Ejercicio 1.36 (Covarianza bilineal con una matriz de covarianzas). Tres indicadores económicos X, Y, Z (estandarizados) tienen la siguiente matriz de varianzas-covarianzas (las entradas están en las mismas unidades²):

	X	Y	Z
X	5	-2	1.5
Y	-2	8	0
Z	1.5	0	3

Es decir $\text{Var}(X) = 5$, $\text{Var}(Y) = 8$, $\text{Var}(Z) = 3$, $\text{Cov}(X, Y) = -2$, $\text{Cov}(X, Z) = 1.5$ y $\text{Cov}(Y, Z) = 0$. Define dos índices: $U = 2X + 3Y$ y $W = X - Z$.

- (1) Calcula $\text{Var}(U)$.
- (2) Calcula $\text{Cov}(U, W)$ usando la **bilinealidad** de la covarianza.
- (3) ¿Son U y W positiva o negativamente asociados?

(Adaptado de MIT 18.05, Class 6 —covariance— propiedades de combinaciones lineales.)

Ejercicio 1.37 (LOTUS no lineal y desigualdad de Jensen). Una ONG reparte ayuda inversamente proporcional al ingreso: una familia con ingreso (en miles de soles) X recibe una transferencia $g(X) = \frac{1}{X}$. Supongamos que X es uniforme discreta sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ (cada valor con probabilidad $\frac{1}{4}$).

- (1) Calcula $\mathbb{E}[X]$ y $\frac{1}{\mathbb{E}[X]}$.
- (2) Usando **LOTUS**, calcula $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.
- (3) Compara: ¿es $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$ mayor o menor que $\frac{1}{\mathbb{E}[X]}$? Conecta el resultado con la **desigualdad de Jensen** (g convexa $\Rightarrow \mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$) y da una intuición.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 5/6 —LOTUS y funciones de v.a.)

Ejercicio 1.38 ($\mathbb{E}[X]$. vía la función de supervivencia] Sea $X \geq 0$ una variable continua con función de supervivencia $S(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$. Un resultado útil es

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) dx = \int_0^\infty S(x) dx.$$

- (1) Verifica la fórmula para la exponencial $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (donde $S(x) = e^{-\lambda x}$).
- (2) (*Opcional*) Esboza por qué la fórmula es cierta intercambiando el orden de integración.

(Idea inspirada en *hanmochen, Probability-Theory-2020-Autumn, HW2*.)

Ejercicio 1.39 (Función generadora de momentos (MGF): exponencial). La función generadora de momentos (MGF, por *moment generating function*) de una variable X se define como

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}],$$

para los t en que la esperanza existe. Su utilidad: derivando en $t = 0$ se obtienen los momentos, $M'_X(0) = \mathbb{E}[X]$, $M''_X(0) = \mathbb{E}[X^2]$, etc. (de ahí el nombre). Sea X el tiempo (en meses) hasta conseguir empleo, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ con densidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$.

- (1) Calcula $M_X(t)$ integrando $\int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx$ e indica para qué t converge.
- (2) Deriva una y dos veces para obtener $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[X^2]$; deduce $\text{Var}(X)$.
- (3) Comenta brevemente por qué se dice que “la MGF *identifica* la distribución”.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 6, e introducción estándar a la MGF.)

Nivel 5 – Reto+

Muy difícil / fuera del scope típico: demostraciones y casos límite.

Ejercicio 1.40 (MGF de una Poisson). Sea $X \sim \text{Pois}(\mu)$, con pmf $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\mu} \mu^k / k!$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

- (1) Demuestra que $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \exp(\mu(e^t - 1))$. (*Pista: usa la serie de Taylor $\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{k!} = e^a$ con $a = \mu e^t$.*)
- (2) Obtén $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[X^2]$ por derivación y verifica que $\text{Var}(X) = \mu$.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 5 —Poisson— y Class 6 —MGF.)

Ejercicio 1.41 (La mejor predicción lineal y el error que minimiza). Queremos predecir Y (ingreso) a partir de X (años de educación) con una recta $\hat{Y} = a + bX$, eligiendo a, b que minimicen el error cuadrático medio $M(a, b) = \mathbb{E}[(Y - a - bX)^2]$. Sean μ_X, μ_Y las medias, σ_X^2, σ_Y^2 las varianzas y ρ la correlación.

- (1) Derivando M respecto de a y b e igualando a cero, demuestra que

$$b^* = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}, \quad a^* = \mu_Y - b^* \mu_X.$$

- (2) Demuestra que el error mínimo es $M(a^*, b^*) = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2)$.

- (3) **Aplicación numérica.** Con $\mu_X = 10$, $\mu_Y = 1\,500$, $\sigma_X = 3$, $\sigma_Y = 900$ y $\rho = 0.6$: calcula b^* , a^* , el error mínimo y la raíz del error (desviación típica del residuo). Comenta la conexión con la regresión.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 6 —covariance y predicción lineal— y de la idea de regresión por mínimos cuadrados; también inspirado en *hanmochen HW4*.)

Ejercicio 1.42 (La paradoja de San Petersburgo (esperanza infinita)). Un casino ofrece el siguiente juego. Se lanza una moneda justa repetidamente hasta que sale *cara* por primera vez. Si la primera cara aparece en el lanzamiento k , el casino te paga 2^k soles. Sea G el premio.

- (1) Escribe $\mathbb{P}(G = 2^k)$ para $k = 1, 2, 3, \dots$ y verifica que las probabilidades suman 1.
- (2) Calcula $\mathbb{E}[G]$. ¿Qué ocurre?
- (3) Si el juego cuesta C soles entrar, la “teoría de la esperanza” diría que conviene pagar cualquier C finito. Explica por qué casi nadie pagaría, digamos, $C = 1000$ soles, y por qué la esperanza por sí sola no captura la decisión (utilidad, riesgo, riqueza finita del casino).

(Problema clásico; se conecta con la discusión de esperanza en MIT 18.05, Class 5.)

Ejercicio 1.43 (Media y varianza de una suma con número aleatorio de sumandos (Wald)). Una tienda recibe un número aleatorio N de clientes en una hora, con $\mathbb{E}[N] = 4$ y $\text{Var}(N) = 2$. Cada cliente i gasta X_i soles, con $\mathbb{E}[X_i] = 50$ y $\text{Var}(X_i) = 100$, y los X_i son independientes entre sí e independientes de N . La venta total es la **suma aleatoria** $S = \sum_{i=1}^N X_i$ (con $S = 0$ si $N = 0$).

- (1) Usando esperanza iterada, demuestra la **identidad de Wald** $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X]$ y calcula $\mathbb{E}[S]$.
- (2) Usando la ley de varianza total, demuestra $\text{Var}(S) = \mathbb{E}[N] \text{Var}(X) + \text{Var}(N) (\mathbb{E}[X])^2$ y calcula $\text{Var}(S)$.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 6 —variance y conditional expectation— aplicado a sumas aleatorias.)

Ejercicio 1.44 (Esperanza del mínimo y del máximo de dos esperas). Dos trámites independientes tardan X e Y días, ambos $\text{Exp}(\lambda)$ independientes (misma tasa λ). Te interesan el *primero en terminar* $L = \min(X, Y)$ y el *último* $H = \max(X, Y)$.

- (1) Demuestra que $L = \min(X, Y) \sim \text{Exp}(2\lambda)$ y deduce $\mathbb{E}[L]$. (*Pista: $\mathbb{P}(L > t) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t)$.*)
- (2) Usando la identidad $\min(X, Y) + \max(X, Y) = X + Y$, halla $\mathbb{E}[H]$ sin integrar la densidad del máximo.
- (3) Para $\lambda = \frac{1}{2}$ (media de cada trámite = 2 días), da los valores numéricos de $\mathbb{E}[L]$ y $\mathbb{E}[H]$ e interpreta.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 5/6 —funciones de v.a., mínimos y supervivencia.)

Ejercicio 1.45 (Transformación $Y = (X + 1)/2$: hallar F_Y , f_Y y verificar $\int f_Y = 1$). Un índice X (p. ej. un puntaje centrado) tiene densidad $f_X(x) = \frac{3}{2}x^2$ para $x \in [-1, 1]$ (y 0 fuera). Para llevarlo a la escala $[0, 1]$ definimos $Y = \frac{X + 1}{2}$.

- (a) ¿A qué intervalo mapea Y el soporte $[-1, 1]$ de X ?
- (b) Halla la cdf $F_Y(y)$ (método de la cdf).
- (c) Deriva la pdf $f_Y(y)$ y **verifica que** $\int f_Y(y) dy = 1$.
- (d) Calcula $\mathbb{E}[Y]$.

Fuentes y atribución

Material de repaso **basado en MIT 14.310x – Data Analysis for Social Scientists** (Esther Duflo & Sara Fisher Ellison), MIT OpenCourseWare, licencia **CC BY-NC-SA 4.0** (uso no comercial, con atribución, compartir bajo la misma licencia), y en las fuentes de la bibliografía. Los enunciados se basan en el material del curso y en diversas fuentes abiertas; cuando un problema se adapta de una fuente específica, se cita en el enunciado.

Bibliografía.

- Duflo, E. & Ellison, S. F. *14.310x: Data Analysis for Social Scientists*. MIT OpenCourseWare (slides, lecture notes y problem sets). ocw.mit.edu.
- Larsen, R. J. & Marx, M. L. *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*, 6.^a ed., Pearson, 2018.
- DeGroot, M. H. & Schervish, M. J. *Probability and Statistics*, 4.^a ed., Pearson, 2012.
- Blitzstein, J. & Hwang, J. *Introduction to Probability* (Harvard Stat 110); W. Chen, *Probability Cheatsheet*.
- Diez, D., Çetinkaya-Rundel, M. & Barr, C. *OpenIntro Statistics*. openintro.org.
- Materiales abiertos de la comunidad del curso en GitHub: [gevorg-hunanyan/probability](https://github.com/gevorg-hunanyan/probability); [hanmochen/Probability-Theory-2020](https://github.com/hanmochen/Probability-Theory-2020); [mynameisjanus/14310xDataAnalysis](https://github.com/mynameisjanus/14310xDataAnalysis).

creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0