

14.310x – Data Analysis for Social Scientists

MicroMasters en Statistics and Data Science (SDS) – MITx

BREIT (Brescia Institute of Technology) · Aporta — Grupo Breca

Clase 6

Estimadores, Intervalos de Confianza y Pruebas de Hipótesis

Soluciones

Módulos oficiales del MicroMaster:

M6 – Assessing and Deriving Estimators, Confidence Intervals and Hypothesis Testing

B.Sc. Cristian Lazo Quispe

✉ clazoq@uni.pe

[in linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe](https://www.linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe) · github.com/CristianLazoQuispe

Material del *Advanced Program in Data Science & Global Skills*, diseñado y desarrollado por **BREIT (Brescia Institute of Technology)**, iniciativa de **Aporta** —plataforma de innovación e impacto social del **Grupo Breca**— en alianza con el **MIT IDSS** (Institute for Data, Systems, and Society).

Basado en MIT 14.310x (E. Duflo & S. Ellison) y en diversas fuentes abiertas (ver bibliografía al final), bajo licencia CC BY-NC-SA 4.0.

11 de agosto de 2026

Niveles de dificultad (*difficulty levels*)

Cada problema está rotulado por color según su nivel, de lo más accesible (Nivel 1) a lo más difícil (Nivel 5). Empieza por donde te sientas cómodo y avanza a tu ritmo; los niveles 4–5 son extensiones para profundizar, no un requisito.

- **Nivel 1 – Fundamentos:** calentamiento muy guiado; para quien parte de casi cero.
- **Nivel 2 – Núcleo:** el nivel objetivo del curso/examen.
- **Nivel 3 – Aplicación:** combina varias ideas en contexto realista.
- **Nivel 4 – Reto:** difícil, integra varios temas.
- **Nivel 5 – Reto+:** muy difícil / fuera del scope típico.

1. Problemas y soluciones

Nivel 1 – Fundamentos (warm-up)

Para quien parte de casi cero: cálculos directos y guiados.

Ejercicio 1.1 (¿El estimador es insesgado?). Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria i.i.d. con media poblacional μ y varianza σ^2 . Se proponen dos estimadores de μ : $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$ (la media muestral) y $\hat{\mu}_2 = X_1$ (la primera observación).

- (a) Calcula $\mathbb{E}[\hat{\mu}_1]$ y $\mathbb{E}[\hat{\mu}_2]$. ¿Son insesgados para μ ?
- (b) El *sesgo* (bias) de un estimador $\hat{\theta}$ es $\text{bias}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$. Da el sesgo de cada uno.

Solución

- (a) $\mathbb{E}[\hat{\mu}_1] = \mathbb{E}[\bar{X}] = \mu$ y $\mathbb{E}[\hat{\mu}_2] = \mathbb{E}[X_1] = \mu$. Ambos son **insesgados** para μ .
- (b) $\text{bias}(\hat{\mu}_1) = \mu - \mu = 0$ y $\text{bias}(\hat{\mu}_2) = \mu - \mu = 0$. Ambos sesgos son cero. (La diferencia entre ellos no está en el sesgo sino en la varianza: $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n < \sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ para $n > 1$.)

Ejercicio 1.2 (Calcular el sesgo de un estimador propuesto). Sea $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con media μ . Un analista propone estimar μ con $\hat{\mu}_3 = \bar{X} + 2$ (suma 2 “por si acaso”).

- (a) Calcula $\mathbb{E}[\hat{\mu}_3]$ usando que $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mu$.
- (b) Da el sesgo $\text{bias}(\hat{\mu}_3) = \mathbb{E}[\hat{\mu}_3] - \mu$. ¿Es insesgado?

Solución

- (a) $\mathbb{E}[\hat{\mu}_3] = \mathbb{E}[\bar{X} + 2] = \mathbb{E}[\bar{X}] + 2 = \mu + 2$.
 (b) $\text{bias}(\hat{\mu}_3) = (\mu + 2) - \mu = 2$. **No** es insesgado: sobreestima a μ por 2 en promedio, sin importar el tamaño de muestra (el sesgo no desaparece al crecer n).

Ejercicio 1.3 (Error estándar de la media muestral). El gasto mensual en alimentos en una población tiene desviación estándar $\sigma = 240$ soles (conocida). Se toma una muestra aleatoria de $n = 64$ hogares y se calcula $\bar{X}$.

- (a) Calcula el error estándar $\text{SD}(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$.
 (b) Si n sube a 144, ¿cuánto vale el error estándar?

Solución

- (a) $\text{SD}(\bar{X}) = \frac{240}{\sqrt{64}} = \frac{240}{8} = 30$ soles.
 (b) $\text{SD}(\bar{X}) = \frac{240}{\sqrt{144}} = \frac{240}{12} = 20$ soles. Más muestra, menos error estándar (decrece como $1/\sqrt{n}$).

Ejercicio 1.4 (Construir un IC del 95 % paso a paso (σ conocida)). El peso al nacer en una maternidad tiene desviación estándar poblacional conocida $\sigma = 500$ g. En una muestra de $n = 25$ recién nacidos la media es $\bar{x} = 3\,200$ g. El IC del 95 % para μ es $\bar{x} \pm z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con $z_{0.975} = 1.96$.

- (a) Calcula el error estándar $\sigma/\sqrt{n}$.
 (b) Calcula el margen de error $z_{0.975} \sigma/\sqrt{n}$.
 (c) Escribe el intervalo de confianza del 95 % para μ .

Solución

- (a) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{500}{\sqrt{25}} = \frac{500}{5} = 100$ g.
 (b) Margen = $1.96 \times 100 = 196$ g.
 (c) $3\,200 \pm 196 = [3\,004, 3\,396]$ g. Con 95 % de confianza, el peso medio poblacional μ está en $[3\,004, 3\,396]$ g.

Ejercicio 1.5 (IC del 95 % para la media con σ conocida). Una prueba estandarizada tiene desviación estándar poblacional conocida $\sigma = 15$ puntos. En una muestra de $n = 100$ estudiantes la media es $\bar{x} = 72$. El IC del 95 % para μ es $\bar{x} \pm z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con $z_{0.975} = 1.96$.

- (a) Calcula el error estándar $\sigma/\sqrt{n}$ y el margen de error $z_{0.975} \sigma/\sqrt{n}$.
 (b) Escribe el intervalo de confianza del 95 %.

Solución

- (a) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1.5$. El margen de error es $1.96 \times 1.5 = 2.94$ puntos.
- (b) $72 \pm 2.94 = [69.06, 74.94]$. Con 95 % de confianza, μ está en $[69.06, 74.94]$.

Ejercicio 1.6 (Identificar H_0 y H_1 de una frase). Para cada situación plantea la hipótesis nula H_0 y la alternativa H_1 en términos del parámetro indicado.

- (a) Se afirma que el tiempo medio de trámite es $\mu_0 = 30$ min; quieres ver si *difiere* de 30.
- (b) Una ONG sostiene que su programa eleva el ingreso medio por encima de $\mu_0 = 1\,500$ soles.
- (c) Un funcionario afirma que la proporción de aprobación es $p_0 = 0.5$; sospechas que es *menor*.

Solución

- (a) $H_0 : \mu = 30$ vs. $H_1 : \mu \neq 30$ (dos colas).
- (b) $H_0 : \mu = 1\,500$ (o $\mu \leq 1\,500$) vs. $H_1 : \mu > 1\,500$ (una cola, derecha).
- (c) $H_0 : p = 0.5$ vs. $H_1 : p < 0.5$ (una cola, izquierda).
- Por convención, H_0 contiene la igualdad y es la afirmación que se pone a prueba.

Ejercicio 1.7 (Estimación puntual de μ y de p). En una encuesta a $n = 200$ personas, 130 aprueban una política y la edad media observada es $\bar{x} = 41$ años.

- (a) Da la estimación puntual de la proporción poblacional p que aprueba.
- (b) Da la estimación puntual de la media poblacional de edad μ .

Solución

- (a) $\hat{p} = \frac{130}{200} = 0.65$. La proporción muestral $\hat{p}$ es el estimador natural (e insesgado) de p .
- (b) $\hat{\mu} = \bar{x} = 41$ años. La media muestral es el estimador natural (e insesgado) de μ .

Ejercicio 1.8 (Leer un valor crítico). Trabajas con el estadístico Z bajo H_0 , que es $\mathcal{N}(0, 1)$.

- (a) Para una prueba de *dos colas* con $\alpha = 0.05$, ¿cuál es el valor crítico $z_{1-\alpha/2}$ y la regla de rechazo?
- (b) Para una prueba de *una cola* (derecha) con $\alpha = 0.05$, ¿cuál es el valor crítico $z_{1-\alpha}$ y la regla de rechazo?

Solución

- (a) $z_{0.975} = 1.96$. Se rechaza H_0 si $|z| > 1.96$ (las dos colas suman 0.05, 0.025 en cada una).
- (b) $z_{0.95} = 1.645$. Se rechaza H_0 si $z > 1.645$ (toda la masa 0.05 en la cola derecha).

Nivel 2 – Núcleo (core)

El nivel objetivo del curso/examen; todos deberían llegar aquí.

Ejercicio 1.9 (MSE = sesgo² + varianza). El error cuadrático medio de un estimador es $\text{MSE}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \text{bias}(\hat{\theta})^2 + \text{Var}(\hat{\theta})$. Un estimador del ingreso medio tiene sesgo $\text{bias}(\hat{\theta}) = 4$ soles y varianza $\text{Var}(\hat{\theta}) = 9$ soles².

- (a) Calcula su MSE.
- (b) Otro estimador es insesgado pero tiene varianza 20. ¿Cuál tiene menor MSE?

Solución

- (a) $\text{MSE} = \text{bias}^2 + \text{Var} = 4^2 + 9 = 16 + 9 = 25$.
- (b) El segundo: $\text{MSE} = 0^2 + 20 = 20 < 25$. Aunque el primero es “más preciso” (menor varianza), su sesgo lo penaliza; el insesgado gana por MSE.

Ejercicio 1.10 (Interpretar correctamente un IC). Un equipo reporta un IC del 95 % para la proporción de hogares con internet: $[0.58, 0.66]$. Para cada afirmación indica si es **correcta** o **incorrecta**.

- (a) “Hay 95 % de probabilidad de que el verdadero p esté entre 0.58 y 0.66.”
- (b) “Si repitiéramos el muestreo muchas veces, cerca del 95 % de los intervalos así contruidos contendrían al verdadero p .”
- (c) “El 95 % de los hogares de la muestra tiene internet.”

Solución

- (a) **Incorrecta** (matiz frecuentista). Una vez calculado, el intervalo $[0.58, 0.66]$ son números fijos; p también es fijo. La probabilidad 0.95 describe el *procedimiento*, no este intervalo particular.
- (b) **Correcta**: es la interpretación frecuentista correcta de la confianza.
- (c) **Incorrecta**: el IC habla del parámetro p , no del porcentaje observado en la muestra.

Ejercicio 1.11 (Nivel de confianza y ancho del IC). Con $\bar{x} = 50$, $\sigma = 10$ y $n = 100$ (así $\sigma/\sqrt{n} = 1$), se calculan dos intervalos para μ : uno al 90 % ($z = 1.645$) y otro al 99 % ($z = 2.576$).

- (a) Escribe ambos intervalos.
- (b) ¿Cuál es más ancho y por qué?

Solución

- (a) 90 %: $50 \pm 1.645(1) = [48.355, 51.645]$.
99 %: $50 \pm 2.576(1) = [47.424, 52.576]$.
- (b) El del 99 % es más ancho. Más confianza exige un intervalo mayor: para estar “más seguros” de capturar a μ hay que abarcar más.

Ejercicio 1.12 (Decisión con un valor crítico). Para probar $H_0 : \mu = 0$ vs. $H_1 : \mu \neq 0$ se calcula el estadístico $z = 2.3$. Usas $\alpha = 0.05$ (dos colas), con valor crítico $z_{0.975} = 1.96$.

- (a) ¿Se rechaza H_0 ? Justifica.
- (b) Si el estadístico hubiera sido $z = 1.2$, ¿cambiaría la decisión?

Solución

- (a) Como $|z| = 2.3 > 1.96$, el estadístico cae en la región de rechazo: **se rechaza H_0** .
- (b) Con $|z| = 1.2 < 1.96$ **no** se rechazaría H_0 : el estadístico cae en la zona de no rechazo.

Ejercicio 1.13 (IC para la media con σ desconocida (t de Student)). En $n = 16$ municipios se mide el gasto per cápita en salud: $\bar{x} = 320$ soles y desviación estándar muestral $s = 40$ soles. Como σ es desconocida, se usa $\bar{x} \pm t_{n-1, 0.975} \frac{s}{\sqrt{n}}$. Con 15 grados de libertad, $t_{15, 0.975} = 2.131$.

- (a) Calcula el error estándar estimado $s/\sqrt{n}$ y el margen de error.
- (b) Escribe el IC del 95 % y compáralo con el que daría la normal ($z = 1.96$).

Solución

- (a) $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{40}{\sqrt{16}} = \frac{40}{4} = 10$. Margen = $2.131 \times 10 = 21.31$ soles.
- (b) IC con t : $320 \pm 21.31 = [298.69, 341.31]$. Con la normal sería $320 \pm 1.96(10) = [300.4, 339.6]$, más *angosto*. La t tiene colas más gruesas (penaliza por estimar σ), por eso el intervalo es más ancho con n pequeño.

Ejercicio 1.14 (IC para una proporción). En una encuesta a $n = 400$ votantes, $\hat{p} = 0.45$ apoya a una candidata. El IC del 95 % para p usa $\hat{p} \pm z_{0.975} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ con $z_{0.975} = 1.96$.

- (a) Calcula el error estándar $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ y el margen de error.
- (b) Escribe el intervalo. ¿Es plausible que el verdadero p sea 0.5?

Solución

- (a) $\sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{400}} = \sqrt{\frac{0.2475}{400}} = \sqrt{0.00061875} \approx 0.0249$. Margen = $1.96 \times 0.0249 \approx 0.0488$.
- (b) $0.45 \pm 0.0488 = [0.401, 0.499]$. El valor 0.5 queda (apenas) *fuera* del intervalo, así que $p = 0.5$ no es del todo plausible al 95 %; la evidencia apunta a $p < 0.5$, aunque el margen es estrecho.

Ejercicio 1.15 (Prueba de hipótesis sobre una media (estadístico z)). Se afirma que el tiempo medio de espera en una posta es $\mu_0 = 20$ min. Con $\sigma = 6$ min conocida, una muestra de $n = 36$ da $\bar{x} = 22$ min. Prueba $H_0 : \mu = 20$ vs. $H_1 : \mu \neq 20$ con $\alpha = 0.05$.

- (a) Calcula el estadístico $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.
- (b) Compara con $z_{0.975} = 1.96$ y concluye.

Solución

- (a) $SD(\bar{X}) = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1$. Así $z = \frac{22 - 20}{1} = 2$.
- (b) $|z| = 2 > 1.96$: **se rechaza** H_0 al 5 %. Hay evidencia de que el tiempo medio difiere de 20 min (parece mayor).

Ejercicio 1.16 (p -valor y su interpretación). En la prueba anterior ($H_1 : \mu \neq 20$) se obtuvo $z = 2$.

- (a) Calcula el p -valor de dos colas, $p = 2\mathbb{P}(Z > 2)$. (Usa $\mathbb{P}(Z > 2) \approx 0.0228$.)
- (b) Interpreta el p -valor y compáralo con $\alpha = 0.05$.

Solución

- (a) $p = 2 \times 0.0228 = 0.0456 \approx 0.046$.
- (b) El p -valor es la probabilidad, *si H_0 fuera cierta*, de observar un estadístico tan o más extremo que el obtenido. Como $p = 0.046 < 0.05$, **se rechaza** H_0 (consistente con la regla del valor crítico). No es “la probabilidad de que H_0 sea verdadera”.

Ejercicio 1.17 (Error tipo I vs. error tipo II). Se prueba si un programa social funciona (H_0 : “no tiene efecto”; H_1 : “sí tiene efecto”).

- (a) Describe en este contexto el error tipo I y el error tipo II.
- (b) Nombra α , β y la potencia, y di qué mide cada uno.

Solución

- (a) **Tipo I:** rechazar H_0 siendo cierta, es decir concluir que el programa funciona cuando *no* tiene efecto (falso positivo). **Tipo II:** no rechazar H_0 siendo falsa, es decir no detectar el efecto cuando *sí* existe (falso negativo).
- (b) $\alpha = \mathbb{P}(\text{tipo I})$ es el nivel de significancia; $\beta = \mathbb{P}(\text{tipo II})$; la **potencia** $= 1 - \beta = \mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ cierta})$ es la capacidad de detectar un efecto real.

Ejercicio 1.18 (Prueba de una cola sobre la media). Una ONG afirma que su programa eleva el ingreso medio por encima de $\mu_0 = 1\,200$ soles. Con $\sigma = 300$ conocida, una muestra de $n = 100$ beneficiarios da $\bar{x} = 1\,260$. Prueba $H_0 : \mu = 1\,200$ vs. $H_1 : \mu > 1\,200$ con $\alpha = 0.05$.

- (a) Calcula el estadístico z .
- (b) Compáralo con $z_{0.95} = 1.645$ y concluye.

Solución

- (a) $SD(\bar{X}) = \frac{300}{\sqrt{100}} = 30$, así $z = \frac{1\,260 - 1\,200}{30} = \frac{60}{30} = 2$.
- (b) Prueba de una cola (derecha): se rechaza si $z > 1.645$. Como $z = 2 > 1.645$, **se rechaza** H_0 : hay evidencia de que el ingreso medio supera 1 200 soles.

Nivel 3 – Aplicación

Combina dos o más ideas en contexto realista; consolida lo aprendido.

Ejercicio 1.19 (Efecto del tamaño de muestra en el ancho del IC). Con $\sigma = 20$ conocida y $\bar{x}$ fijo, se construye un IC del 95 % para μ ($z = 1.96$).

- (1) Da el margen de error $m = z\sigma/\sqrt{n}$ para $n = 25$ y para $n = 100$.
- (2) ¿En qué factor cambia el ancho al pasar de $n = 25$ a $n = 100$?

Solución

- (1) $n = 25$: $m = 1.96 \cdot \frac{20}{5} = 1.96 \cdot 4 = 7.84$.
 $n = 100$: $m = 1.96 \cdot \frac{20}{10} = 1.96 \cdot 2 = 3.92$.
- (2) El ancho ($= 2m$) se reduce a la *mitad*: cuadruplicar n ($25 \rightarrow 100$) divide el margen por $\sqrt{4} = 2$, porque $m \propto 1/\sqrt{n}$.

Ejercicio 1.20 (Tamaño de muestra para un margen de error dado). Quieres estimar la proporción p de hogares con acceso a agua potable con un margen de error de a lo sumo 0.03 al 95 % ($z = 1.96$). Sin información previa usas el caso más conservador $p = 0.5$ (que maximiza $p(1 - p) = 0.25$).

- (1) Plantea $z\sqrt{p(1 - p)/n} \leq 0.03$ y despeja n .
- (2) ¿Cuántos hogares se necesitan?

Solución

- (1) $1.96\sqrt{\frac{0.25}{n}} \leq 0.03 \iff \sqrt{\frac{0.25}{n}} \leq \frac{0.03}{1.96} = 0.015306$. Elevando al cuadrado: $\frac{0.25}{n} \leq 0.00023429$, de donde $n \geq \frac{0.25}{0.00023429} \approx 1\,067.1$.
- (2) Se redondea hacia arriba: $n = 1\,068$ hogares (en la práctica se suele citar $\approx 1\,068$).

Ejercicio 1.21 (IC del 95 % y dualidad con una prueba de dos colas). Con $\sigma = 12$ conocida, una muestra de $n = 144$ estudiantes da $\bar{x} = 64$. Además se quiere contrastar si μ podría ser 66.

- (1) Construye el IC del 95 % para μ ($z = 1.96$).
- (2) Usando el IC, ¿se rechazaría $H_0 : \mu = 66$ vs. $H_1 : \mu \neq 66$ al 5 %?

Solución

- (1) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{12} = 1$; margen = $1.96(1) = 1.96$. IC: $64 \pm 1.96 = [62.04, 65.96]$.
- (2) Como 66 *no* pertenece a $[62.04, 65.96]$, se **rechaza** $H_0 : \mu = 66$ al 5 %. (Es la dualidad IC $\leftrightarrow$ prueba de dos colas.)

Ejercicio 1.22 (Decisión por p -valor en una cola). Se prueba $H_0 : p = 0.30$ vs. $H_1 : p > 0.30$ (proporción de jóvenes que estudian y trabajan). El estadístico calculado es $z = 1.75$.

- (1) Calcula el p -valor de una cola, $p = \mathbb{P}(Z > 1.75)$. (Usa $\mathbb{P}(Z > 1.75) \approx 0.0401$.)
- (2) Decide con $\alpha = 0.05$ y con $\alpha = 0.01$.

Solución

- (1) $p = \mathbb{P}(Z > 1.75) \approx 0.0401$.
- (2) Con $\alpha = 0.05$: $0.0401 < 0.05$, se **rechaza** H_0 . Con $\alpha = 0.01$: $0.0401 > 0.01$, **no** se rechaza. La conclusión depende del nivel elegido; por eso conviene reportar el p -valor.

Ejercicio 1.23 (Estimador por momentos y por máxima verosimilitud: Bernoulli). Sea $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Bernoulli(p) (por ejemplo, $X_i = 1$ si el hogar i tiene internet). Recuerda $\mathbb{E}[X_i] = p$ y $f(x | p) = p^x(1-p)^{1-x}$.

- (1) **Momentos:** iguala el primer momento poblacional al muestral y despeja $\hat{p}_{\text{MM}}$.
- (2) **Máxima verosimilitud:** escribe la log-verosimilitud $\ell(p) = \sum_i [x_i \ln p + (1-x_i) \ln(1-p)]$, deriva, iguala a cero y despeja $\hat{p}_{\text{MLE}}$.

Solución

(1) Primer momento poblacional $\mathbb{E}[X] = p$; primer momento muestral $\bar{X}$. Igualando $p = \bar{X}$, queda $\hat{p}_{\text{MM}} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_i X_i$.

(2) $\ell'(p) = \sum_i \left[\frac{x_i}{p} - \frac{1-x_i}{1-p} \right] = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1-p}$. Igualando a 0: $(1-p) \sum x_i = p(n - \sum x_i) \Rightarrow \sum x_i = pn \Rightarrow \hat{p}_{\text{MLE}} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$.

Ambos métodos coinciden: $\hat{p} = \bar{X}$, la proporción muestral.

Ejercicio 1.24 (MLE de λ : Poisson y Exponencial). (1) **Poisson.** $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\text{Pois}(\lambda)$, con $f(x | \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$. Halla $\hat{\lambda}_{\text{MLE}}$.

(2) **Exponencial.** $T_1, \dots, T_n$ i.i.d. exponenciales con tasa λ , $f(t | \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$ ($t \geq 0$). Halla $\hat{\lambda}_{\text{MLE}}$.

Solución

(1) $\ell(\lambda) = \sum_i [x_i \ln \lambda - \lambda - \ln x_i!]$ = $\ln \lambda \sum x_i - n\lambda - \text{const.}$ Entonces $\ell'(\lambda) = \frac{\sum x_i}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_{\text{MLE}} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$.

(2) $\ell(\lambda) = \sum_i [\ln \lambda - \lambda t_i] = n \ln \lambda - \lambda \sum t_i$. $\ell'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum t_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_{\text{MLE}} = \frac{n}{\sum t_i} = \frac{1}{\bar{T}}$.
(En la Poisson, el MLE coincide con el de momentos $\bar{X}$; en la exponencial, $1/\bar{T}$ es el inverso de la media muestral.)

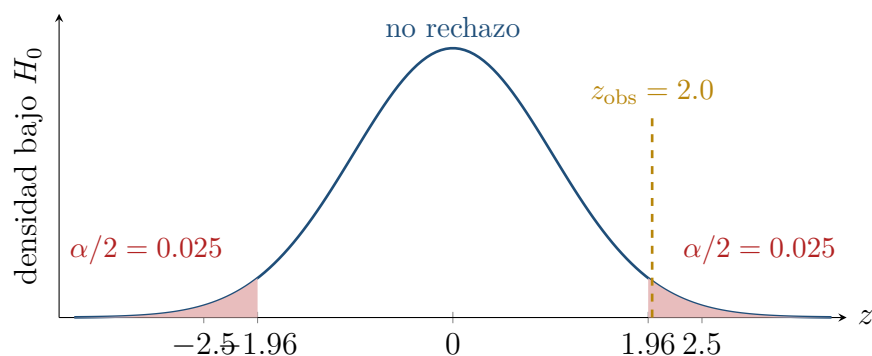
Ejercicio 1.25 (Consistencia de la media muestral). Sea $\bar{X}$ la media de una muestra i.i.d. con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$. Un estimador $\hat{\theta}_n$ es *consistente* para θ si $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$ cuando $n \rightarrow \infty$.

- (1) Calcula $\text{MSE}(\bar{X})$ y muestra que $\rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- (2) Argumenta (vía la desigualdad de Chebyshev / convergencia en media cuadrática) que $\bar{X}$ es consistente para μ .

Solución

- (1) $\bar{X}$ es insesgado, así $\text{MSE}(\bar{X}) = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (2) Por Chebyshev, $\mathbb{P}(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego $\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$: la distribución de $\bar{X}$ “colapsa” sobre μ . Por tanto $\bar{X}$ es **consistente** (es la ley de los grandes números).

Ejercicio 1.26 (Región de rechazo y p -valor bajo la Normal). La figura muestra la densidad del estadístico Z bajo H_0 ($Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$) en una prueba de *dos colas* con $\alpha = 0.05$. Las colas rojas son la región de rechazo ($|z| > 1.96$); la línea punteada marca un estadístico observado $z_{\text{obs}} = 2.0$.



- (1) ¿Se rechaza H_0 con $z_{\text{obs}} = 2.0$? Justifica con la figura.
- (2) Calcula el p -valor de dos colas asociado a $z_{\text{obs}} = 2.0$. (Usa $\mathbb{P}(Z > 2) \approx 0.0228$.)

Solución

- (1) Sí: $z_{\text{obs}} = 2.0 > 1.96$ cae dentro de la cola roja de rechazo, así que **se rechaza** H_0 al 5 %.
- (2) $p = 2\mathbb{P}(Z > 2) = 2(0.0228) = 0.0456 < 0.05$. Coincide con la decisión por región de rechazo: el área en las colas más allá de ± 2.0 es menor que α .

Nivel 4 – Reto

Difícil: integra varios temas en un mismo problema.

Ejercicio 1.27 (Comparar dos estimadores por MSE). Para estimar μ con muestra i.i.d. ($\text{Var}(X_i) = \sigma^2$) se comparan $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$ (insesgado, $\text{Var} = \sigma^2/n$) y el estimador encogido $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}\bar{X}$ (sesgado hacia 0).

- (1) Calcula $\text{bias}(\hat{\mu}_2)$ y $\text{Var}(\hat{\mu}_2)$ en términos de μ, σ^2, n .
- (2) Escribe $\text{MSE}(\hat{\mu}_1)$ y $\text{MSE}(\hat{\mu}_2)$. Para $\mu = 4$, $\sigma^2 = 4$, $n = 4$, ¿cuál es menor?

Solución

- (1) $\mathbb{E}[\hat{\mu}_2] = \frac{1}{2}\mu$, así $\text{bias}(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{2}\mu - \mu = -\frac{\mu}{2}$. $\text{Var}(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{4} \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{4n}$.
- (2) $\text{MSE}(\hat{\mu}_1) = \frac{\sigma^2}{n}$ y $\text{MSE}(\hat{\mu}_2) = \frac{\mu^2}{4} + \frac{\sigma^2}{4n}$. Con $\mu = 4, \sigma^2 = 4, n = 4$: $\text{MSE}(\hat{\mu}_1) = \frac{4}{4} = 1$; $\text{MSE}(\hat{\mu}_2) = \frac{16}{4} + \frac{4}{16} = 4 + 0.25 = 4.25$. Gana $\hat{\mu}_1$ (el sesgo grande de $\hat{\mu}_2$ domina). Encoger ayuda solo cuando μ está muy cerca de 0.

Ejercicio 1.28 (Cálculo de potencia $(1 - \beta)$). Se prueba $H_0 : \mu = 0$ vs. $H_1 : \mu > 0$ con $\sigma = 2$ conocida y $n = 25$, así $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ con $\text{SD}(\bar{X}) = 2/5 = 0.4$. Se usa $\alpha = 0.05$, de modo que la regla rechaza si $\bar{X} > k$ con $k = 0 + 1.645(0.4) = 0.658$.

- (1) Verifica el valor crítico k a partir de $\mathbb{P}(\bar{X} > k \mid \mu = 0) = 0.05$.
- (2) Calcula la potencia si el verdadero valor es $\mu = 1$, es decir $1 - \beta = \mathbb{P}(\bar{X} > k \mid \mu = 1)$. (Usa $\mathbb{P}(Z > -0.855) = \mathbb{P}(Z < 0.855) \approx 0.80$.)

Solución

- (1) Bajo H_0 , $z = \frac{k - 0}{0.4}$ debe valer $z_{0.95} = 1.645$, así $k = 1.645 \times 0.4 = 0.658$.
- (2) Bajo $\mu = 1$: $z = \frac{k - 1}{0.4} = \frac{0.658 - 1}{0.4} = \frac{-0.342}{0.4} = -0.855$. La potencia es $\mathbb{P}(\bar{X} > k \mid \mu = 1) = \mathbb{P}(Z > -0.855) = \mathbb{P}(Z < 0.855) \approx 0.80$. Hay $\approx 80\%$ de probabilidad de detectar el efecto $\mu = 1$.

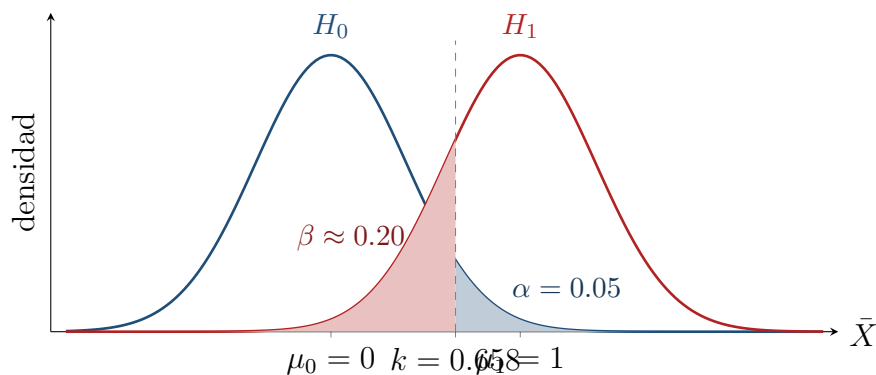
Ejercicio 1.29 (Prueba de dos colas vs. una cola). Se contrasta una media con σ conocida y se obtiene $z = 1.8$.

- (1) Con $H_1 : \mu > \mu_0$ (una cola, $\alpha = 0.05$, $z_{0.95} = 1.645$), ¿se rechaza H_0 ? Da también el p -valor de una cola. (Usa $\mathbb{P}(Z > 1.8) \approx 0.0359$.)
- (2) Con $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (dos colas, $\alpha = 0.05$, $z_{0.975} = 1.96$), ¿se rechaza? Da el p -valor de dos colas.

Solución

- (1) Una cola: $1.8 > 1.645$, **se rechaza**. $p = \mathbb{P}(Z > 1.8) \approx 0.0359 < 0.05$.
- (2) Dos colas: $|1.8| < 1.96$, **no** se rechaza. $p = 2 \mathbb{P}(Z > 1.8) \approx 0.0718 > 0.05$.
- Con la misma evidencia, la prueba de una cola rechaza y la de dos colas no: la de una cola es más “potente” en la dirección supuesta, pero exige haber fijado la dirección *antes* de ver los datos.

Ejercicio 1.30 (Las dos densidades H_0 y H_1 : α y β). La figura muestra la distribución de $\bar{X}$ bajo $H_0 : \mu = 0$ (azul) y bajo $H_1 : \mu = 1$ (rojo), ambas con $SD(\bar{X}) = 0.4$ (caso $\sigma = 2, n = 25$). El umbral de rechazo de una cola es $k = 0.658$. El área azul a la derecha de k es $\alpha = 0.05$; el área roja a la izquierda de k es $\beta \approx 0.20$.



- (1) Identifica en la figura α , β y la potencia $1 - \beta$.
- (2) Si n aumenta, ¿qué les pasa al ancho de las campanas y a β (con α y k ajustados)?

Solución

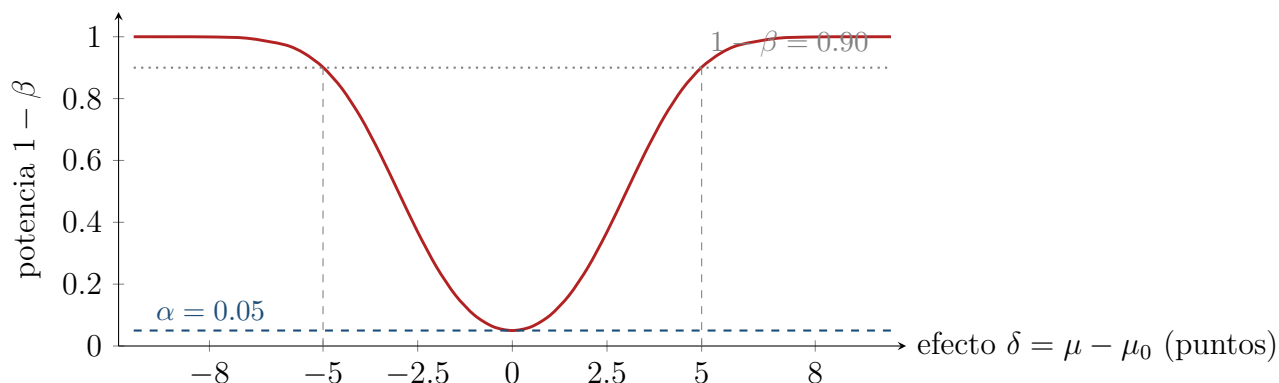
- (1) $\alpha = 0.05$ es el área azul (de H_0) a la derecha de k (probabilidad de tipo I). $\beta \approx 0.20$ es el área roja (de H_1) a la izquierda de k (probabilidad de tipo II). La **potencia** $1 - \beta \approx 0.80$ es el área roja a la *derecha* de k .
- (2) Al crecer n , $SD(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$ baja: ambas campanas se vuelven más altas y angostas, se solapan menos y β *disminuye* (la potencia sube) manteniendo α fijo. Más datos $\Rightarrow$ mejor capacidad de discriminar entre H_0 y H_1 .

Ejercicio 1.31 (Tamaño de muestra para una potencia objetivo y curva de potencia). Un ministerio quiere evaluar si una intervención cambia el puntaje medio μ de una prueba estandarizada cuya desviación estándar poblacional es $\sigma = 15$ puntos (conocida). Se contrasta $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ con $\alpha = 0.05$ (dos colas, $z_{0.975} = 1.96$). Se desea *detectar* un efecto de tamaño $\delta = 5$ puntos con potencia $1 - \beta = 0.90$. La fórmula aproximada de tamaño de muestra para una prueba de dos colas es

$$n = \frac{(z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2}, \quad z_{0.975} = 1.96, \quad z_{0.90} = 1.28.$$

- (1) Calcula el n necesario y redondéalo hacia arriba.
- (2) Con ese n , el error estándar es $SD(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$. Explica por qué la potencia *crece* con $|\delta|$ y se aproxima a α cuando $\delta \rightarrow 0$. Apoya tu argumento en la curva de potencia de la figura.

- (3) Si solo importara detectar un efecto la mitad de grande ($\delta = 2.5$), ¿en qué factor cambiaría el n requerido?



Solución

(1) $n = \frac{(1.96 + 1.28)^2 \cdot 15^2}{5^2} = \frac{(3.24)^2 \cdot 225}{25} = \frac{10.4976 \cdot 225}{25} = 10.4976 \cdot 9 = 94.48$. Se redondea hacia arriba: $n = 95$.

(2) Con $n = 95$, $SD(\bar{X}) = \frac{15}{\sqrt{95}} \approx 1.539$. La regla de dos colas rechaza si $|\bar{X} - \mu_0| / SD(\bar{X}) > 1.96$. Si el verdadero efecto es δ , el estadístico se centra en $\delta / SD(\bar{X})$, de modo que la potencia es

$$1 - \beta(\delta) = \Phi\left(-1.96 + \frac{\delta}{SD(\bar{X})}\right) + \Phi\left(-1.96 - \frac{\delta}{SD(\bar{X})}\right).$$

Cuando $\delta \rightarrow 0$ la curva tiende a $\Phi(-1.96) + \Phi(-1.96) = 0.025 + 0.025 = \alpha = 0.05$: sin efecto, la prueba rechaza solo por azar con probabilidad α (es el “piso” de la curva). Al aumentar $|\delta|$, una de las dos colas domina y la potencia sube monótonamente hacia 1. En $\delta = \pm 5$ la curva pasa por ≈ 0.90 (verificado: $\Phi(-1.96 + 5/1.539) + \Phi(-1.96 - 5/1.539) \approx 0.90$), tal como se diseñó.

(3) Como $n \propto 1/\delta^2$, pasar de $\delta = 5$ a $\delta = 2.5$ (la mitad) *cuadruplica* el n : $n \approx 4 \times 95 = 380$. Detectar efectos pequeños es caro.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 18: power and sample size.)

Nivel 5 – Reto+

Muy difícil / fuera del scope típico: demostraciones y casos límite.

Ejercicio 1.32 (MLE de μ y σ^2 de una Normal: el sesgo del MLE de σ^2). Sea $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con *ambos* parámetros desconocidos. La densidad es $f(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

- (1) Escribe la log-verosimilitud $\ell(\mu, \sigma^2)$ y deriva los MLE $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$ resolviendo $\partial\ell/\partial\mu = 0$ y $\partial\ell/\partial\sigma^2 = 0$.
- (2) Demuestra que $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$ es *sesgado*: calcula $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2]$ usando $\mathbb{E}\left[\sum_i (X_i - \bar{X})^2\right] = (n-1)\sigma^2$. ¿Cuál es el sesgo y hacia dónde apunta?
- (3) ¿Qué corrección simple lo vuelve insesgado? Comentá por qué el MLE puede ser sesgado pese a ser “óptimo” en el sentido de la verosimilitud.

Solución

(1) La log-verosimilitud (omitiendo constantes) es

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Respecto a μ : $\frac{\partial\ell}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i (x_i - \mu) = 0 \Rightarrow \sum_i x_i = n\mu \Rightarrow \boxed{\hat{\mu} = \bar{X}}$.

Respecto a σ^2 (tratando $v = \sigma^2$): $\frac{\partial\ell}{\partial v} = -\frac{n}{2v} + \frac{1}{2v^2} \sum_i (x_i - \mu)^2 = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \hat{\mu})^2$,

es decir $\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2}$ (se sustituye $\hat{\mu} = \bar{X}$).

(2) $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\sum_i (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n} (n-1)\sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2$. Entonces $\text{bias}(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n} < 0$: el MLE **subestima** la varianza (sesgo negativo). La causa es que se centra en $\bar{X}$ (el valor que minimiza $\sum (X_i - c)^2$), no en el verdadero μ , lo que “encoge” artificialmente la dispersión.

(3) La corrección es dividir entre $n-1$ en vez de n : $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$ cumple $\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$ (insesgado: la varianza muestral). El sesgo $-\sigma^2/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, así que el MLE es *asintóticamente* insesgado y consistente. Moraleja: la máxima verosimilitud optimiza el ajuste a los datos observados, pero “insesgadez” es una propiedad distinta; no hay garantía de que un MLE sea insesgado en muestras finitas.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 17 & 18: MLE y propiedades de estimadores.)

Ejercicio 1.33 (Comparar dos estimadores de σ^2 por MSE: insesgado vs. encogido). Se quiere estimar la varianza σ^2 de una población $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $n = 10$ observaciones. Se comparan dos estimadores de la forma $c \sum_i (X_i - \bar{X})^2$:

$$T_1 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{insesgado}), \quad T_2 = \hat{\sigma}_{\text{MLE}}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{sesgado}).$$

Para la Normal se sabe que $\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.

- (1) Calcula $\text{MSE}(T_1)$ (recuerda que es insesgado).
- (2) Escribe $T_2 = \frac{n-1}{n}S^2$. Halla su sesgo y su varianza en términos de σ^2 , y luego $\text{MSE}(T_2)$.
Con $n = 10$ y tomando $\sigma^2 = 1$, ¿cuál estimador tiene menor MSE?
- (3) ¿Qué te dice este resultado sobre preferir siempre el estimador insesgado?

Solución

Tomamos $\sigma^2 = 1$ (la comparación de MSE/σ^4 no depende de la escala) y $n = 10$, así $\text{Var}(S^2) = \frac{2}{n-1} = \frac{2}{9} \approx 0.2222$.

(1) T_1 es insesgado, luego $\text{MSE}(T_1) = \text{Var}(S^2) = \frac{2}{9} \approx \mathbf{0.2222}$.

(2) Con $T_2 = \frac{n-1}{n}S^2 = \frac{9}{10}S^2$:

- Sesgo: $\mathbb{E}[T_2] = \frac{9}{10} \cdot 1 = 0.9$, así $\text{bias}(T_2) = 0.9 - 1 = -0.1$ y $\text{bias}^2 = 0.01$.

- Varianza: $\text{Var}(T_2) = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \text{Var}(S^2) = 0.81 \cdot 0.2222 \approx 0.18$.

- $\text{MSE}(T_2) = 0.01 + 0.18 = \mathbf{0.19}$.

Como $0.19 < 0.2222$, el estimador **sesgado** T_2 (el MLE) tiene *menor* MSE que el insesgado S^2 . (De hecho, el factor c que minimiza el MSE es $c = \frac{n-1}{n+1} = \frac{9}{11}$, aún menor, con $\text{MSE} \approx 0.1818$.)

(3) Insesgadez *no* implica MSE mínimo. Aceptar un poco de sesgo a cambio de bastante menos varianza puede reducir el error cuadrático medio total: es el principio del “encogimiento” (*shrinkage*). La elección entre estimadores debe basarse en el criterio relevante (a menudo el MSE), no solo en si son insesgados.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 18: bias, variance y MSE de estimadores.)

Ejercicio 1.34 (*p*-hacking: pruebas múltiples inflan los falsos positivos). Un equipo de investigación recolecta datos de una encuesta social y, sin una hipótesis previa, prueba m correlaciones distintas, cada una con $\alpha = 0.05$. Supongamos (escenario nulo) que *ninguna* relación es real, y que las m pruebas son independientes.

- (1) Para una sola prueba, ¿cuál es la probabilidad de *no* cometer un falso positivo? ¿Y para las m pruebas (la probabilidad de no tener *ningún* falso positivo)?
- (2) Calcula $\mathbb{P}(\text{al menos un falso positivo}) = 1 - (1 - \alpha)^m$ para $m = 10$ y $m = 20$. Comenta el resultado.
- (3) **Corrección de Bonferroni:** para mantener la probabilidad familiar de error (FWER) en ≤ 0.05 , se usa $\alpha^* = \alpha/m$ en cada prueba. Calcula α^* para $m = 20$ y verifica que $1 - (1 - \alpha^*)^{20} \approx 0.05$. ¿Qué se sacrifica al aplicar la corrección?

Solución

(1) Una sola prueba bajo el nulo no da falso positivo con probabilidad $1 - \alpha = 0.95$. Para m pruebas *independientes*, la probabilidad de no tener ningún falso positivo es $(1 - \alpha)^m = 0.95^m$.

(2) $\mathbb{P}(\text{al menos uno}) = 1 - 0.95^m$:

$$m = 10: 1 - 0.95^{10} = 1 - 0.5987 = \mathbf{0.401} \text{ (¡40 \%!).}$$

$$m = 20: 1 - 0.95^{20} = 1 - 0.3585 = \mathbf{0.642} \text{ (¡64 \%!).}$$

Probando muchas hipótesis, es casi seguro encontrar “algo significativo” aunque no haya nada real. Buscar y reportar solo lo que salió $p < 0.05$ (*p-hacking*) produce hallazgos espurios.

(3) Bonferroni: $\alpha^* = \frac{0.05}{20} = \mathbf{0.0025}$. Entonces $1 - (1 - 0.0025)^{20} = 1 - 0.9975^{20} \approx 1 - 0.9512 = 0.0488 \approx 0.05$: la probabilidad de *al menos un* falso positivo vuelve a $\approx 5\%$. El precio es la **potencia**: con un umbral tan estricto por prueba, cuesta mucho más detectar efectos reales (sube β). Hay que pre-registrar las hipótesis y corregir por multiplicidad.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 18–19: significancia, errores y la crítica al NHST / multiple testing.)

Ejercicio 1.35 (Prueba de la razón de verosimilitud (introducción)). Sea $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocida. Se contrasta el nulo simple $H_0 : \mu = \mu_0$ contra el alternativo compuesto $H_1 : \mu \neq \mu_0$. El estadístico de la razón de verosimilitud (generalizada) es

$$\Lambda = \frac{\sup_{\mu} L(\mu)}{L(\mu_0)}, \quad L(\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

(1) El supremo de $L(\mu)$ se alcanza en el MLE $\hat{\mu} = \bar{x}$. Demuestra que

$$2 \ln \Lambda = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_i (x_i - \mu_0)^2 - \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \right] = \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}.$$

(Usa la identidad $\sum_i (x_i - \mu_0)^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2$.)

(2) Concluye que $2 \ln \Lambda = z^2$, donde $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ es el estadístico z usual. Así, “rechazar cuando Λ es grande” equivale a “rechazar cuando $|z|$ es grande”. ¿Qué distribución tiene $2 \ln \Lambda$ bajo H_0 ?

(3) Si $\sigma = 4$, $n = 16$, $\mu_0 = 10$ y $\bar{x} = 12$, calcula $2 \ln \Lambda$ y decide al 5% usando que el valor crítico de una χ_1^2 es 3.84 ($= 1.96^2$).

Solución

(1) Con σ^2 conocida, $-2 \ln L(\mu) = n \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_i (x_i - \mu)^2$. Al formar $2 \ln \Lambda =$

$-2 \ln L(\mu_0) - (-2 \ln L(\bar{x}))$, los términos constantes se cancelan y queda

$$2 \ln \Lambda = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_i (x_i - \mu_0)^2 - \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \right].$$

Por la identidad de descomposición $\sum_i (x_i - \mu_0)^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2$, el primer corchete es $n(\bar{x} - \mu_0)^2$, de modo que $2 \ln \Lambda = \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}$.

(2) Reescribiendo, $2 \ln \Lambda = \left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 = z^2$. Por tanto la prueba de razón de verosimilitud y la prueba z de dos colas son *idénticas* aquí. Bajo H_0 , $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, luego $z^2 \sim \chi_1^2$: este es el caso $k = 1$ del teorema de Wilks ($2 \ln \Lambda \xrightarrow{d} \chi_{\text{gl}}^2$, con grados de libertad = número de parámetros restringidos).

(3) $z = \frac{12 - 10}{4/\sqrt{16}} = \frac{2}{1} = 2$, así $2 \ln \Lambda = z^2 = 4$. Como $4 > 3.84$, **se rechaza** H_0 al 5 % (equivalente a $|z| = 2 > 1.96$). Los dos enfoques coinciden, como deben.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 18: likelihood ratio tests.)

Ejercicio 1.36 (Bootstrap conceptual: IC sin fórmula cerrada). Un economista tiene una muestra de $n = 200$ ingresos y quiere un IC del 95 % para la *mediana* poblacional, para la cual no hay una fórmula simple del error estándar (la mediana no es una media). Decide usar el **bootstrap no paramétrico**.

- (1) Describe el procedimiento: ¿qué significa una “remuestra bootstrap” y cómo se construye? ¿Cuántas se generan y qué se calcula en cada una?
- (2) Explica el método del *percentil*: a partir de las B medianas bootstrap $\hat{m}_1^*, \dots, \hat{m}_B^*$, ¿cómo se obtiene el IC del 95 %?
- (3) ¿Por qué el bootstrap “funciona”? Enuncia el principio del *plug-in*: la distribución empírica $\hat{F}_n$ reemplaza a la desconocida F , y el remuestreo imita el muestreo de la población. Menciona una limitación.

Solución

(1) Una **remuestra bootstrap** es una muestra de tamaño $n = 200$ extraída *con reemplazo* de los 200 datos originales (algunos valores se repiten, otros no aparecen). Se generan B remuestras (típicamente $B = 1\,000$ o $10\,000$); en cada una se calcula el estadístico de interés, aquí la mediana $\hat{m}_b^*$. Así se obtiene la *distribución bootstrap* de la mediana, que aproxima su variabilidad muestral.

(2) *Método del percentil*: se ordenan las B medianas bootstrap y se toman los percentiles 2.5 % y 97.5 %:

$$\text{IC}_{95\%} = \left[\hat{m}_{(0.025)}^*, \hat{m}_{(0.975)}^* \right],$$

es decir, se descarta el 2.5 % inferior y el 2.5 % superior de las $\hat{m}_b^*$. Con $B = 1000$, son

aproximadamente las posiciones 25 y 975 de la lista ordenada.

(3) **Principio plug-in:** no conocemos F , pero la muestra define una distribución empírica $\hat{F}_n$ (peso $1/n$ en cada dato observado) que, por la ley de los grandes números, se parece a F . Remuestrear de $\hat{F}_n$ (= muestrear con reemplazo de los datos) imita el proceso de muestrear de F ; por eso la dispersión de $\hat{m}^* - \hat{m}$ aproxima la de $\hat{m} - m$. **Limitación:** el bootstrap solo puede “ver” la información presente en la muestra; falla si n es muy pequeño, en las colas extremas, o para estadísticos no suaves (p.ej. el máximo). No crea información que la muestra no contiene.

(Adaptado de MIT 18.05, Class 20: bootstrap confidence intervals.)

Fuentes y atribución

Material de repaso **basado en MIT 14.310x – Data Analysis for Social Scientists** (Esther Duflo & Sara Fisher Ellison), MIT OpenCourseWare, licencia **CC BY-NC-SA 4.0** (uso no comercial, con atribución, compartir bajo la misma licencia), y en las fuentes de la bibliografía. Los enunciados se basan en el material del curso y en diversas fuentes abiertas; cuando un problema se adapta de una fuente específica, se cita en el enunciado.

Bibliografía.

- Duflo, E. & Ellison, S. F. *14.310x: Data Analysis for Social Scientists*. MIT OpenCourseWare (slides, lecture notes y problem sets). ocw.mit.edu.
- Larsen, R. J. & Marx, M. L. *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*, 6.^a ed., Pearson, 2018.
- DeGroot, M. H. & Schervish, M. J. *Probability and Statistics*, 4.^a ed., Pearson, 2012.
- Blitzstein, J. & Hwang, J. *Introduction to Probability* (Harvard Stat 110); W. Chen, *Probability Cheatsheet*.
- Diez, D., Çetinkaya-Rundel, M. & Barr, C. *OpenIntro Statistics*. openintro.org.
- Materiales abiertos de la comunidad del curso en GitHub: [gevorg-hunanyan/probability](https://github.com/gevorg-hunanyan/probability); [hanmochen/Probability-Theory-2020](https://github.com/hanmochen/Probability-Theory-2020); [mynameisjanus/14310xDataAnalysis](https://github.com/mynameisjanus/14310xDataAnalysis).

creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0