Conteo, funciones de masa (PMF) y esperanza

Clase 4: *counting*, *random variables* y *expectation*

6.431x — Probability: The Science of Uncertainty and Data

B.Sc. Cristian Lazo Quispe

BREIT (Brescia Institute of Technology) · Aporta — Grupo Breca

Programa SDS (Statistics and Data Science, MITx) · **BREIT** (Brescia Institute of Technology), iniciativa de Aporta —Grupo Breca— en alianza con MIT IDSS.
Basado en MIT 6.431x / MIT OCW RES.6-012 (CC BY-NC-SA 4.0).

clazoq@uni.pe · linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe · github.com/CristianLazoQuispe

Para empezar: ¿cambiarías de puerta? (película *21*, 2008)



Ver el clip: *21 Black Jack — Cambio de variable* (YouTube)

Escena de *21* (2008): el profesor Micky Rosa le plantea el problema a Ben.

El problema de Monty Hall

3 puertas: detrás de una hay un auto; detrás de las otras dos, cabras.

1. Eliges una puerta.
2. El presentador, que **sabe** dónde está el auto, abre otra y muestra una cabra.
3. Te ofrece cambiar a la que queda cerrada.

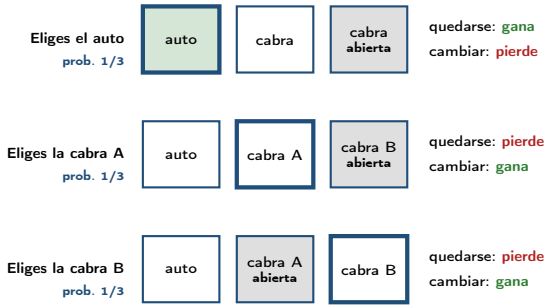
Vota antes de ver el clip

¿Te quedas, cambias, o da igual (50–50)?

Hoy lo resolvemos

Contando los casos posibles, sin ninguna fórmula (siguiente slide y sección 1).

Solución: ¿por qué conviene cambiar?



Borde grueso: tu primera elección. Gris: la puerta que abre el presentador.

Contando

Hay 3 primeras elecciones igual de probables.

- Quedarse gana en **1 de 3**.
- Cambiar gana en **2 de 3**.

El «cambio de variable»

Lo más probable (2/3) es que estés parado en una **cabra**. Como el presentador **sabe** dónde está el auto, abre la otra cabra, y la puerta que queda es el auto.

¿Por qué no es 50–50?

Quedan dos puertas, pero no son igual de probables: el presentador nunca abre la del auto.

Dónde quedamos (Clase 3)

La Unit 2, en una línea

Condicionar es encoger el universo: $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$. De ahí salen la *multiplication rule*, el *total probability theorem*, *Bayes' rule* y la *independence*.

Lo que usaremos hoy

- **Independencia**: en lanzamientos independientes, la probabilidad de una secuencia es el **producto** de las de cada lanzamiento.
- **Ley uniforme discreta** (Clase 1): si todo es equiprobable, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$. Hoy aprendemos a calcular esos $\#$ sin listar.

El salto de hoy

Dejamos de hablar solo de **eventos** ("salió cara") y pasamos a **variables aleatorias** ("número de caras"): números que dependen del azar, con su PMF y su **esperanza**. El puente entre las dos mitades es la **binomial**.

¿Qué veremos hoy? (Unit 3 — Lecture 4 · Unit 4 — Lecture 5)

1. Contar sin equivocarse
2. Combinaciones y el coeficiente binomial
3. De contar a la binomial
4. Variables aleatorias y su PMF
5. Esperanza: el centro de masa
6. Linealidad e indicadores
7. Cierre

Contenido

1. Contar sin equivocarse
2. Combinaciones y el coeficiente binomial
3. De contar a la binomial
4. Variables aleatorias y su PMF
5. Esperanza: el centro de masa
6. Linealidad e indicadores
7. Cierre

El principio fundamental del conteo

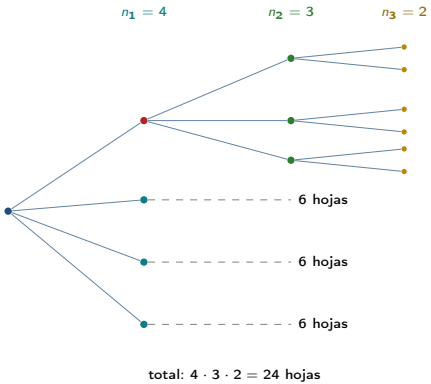
Basic counting principle

Si un objeto se arma en r etapas y la etapa i tiene n_i opciones (**el número** no depende de lo elegido antes), hay

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_r \text{ objetos.}$$

Ejemplos

- 4 camisas, 3 corbatas, 2 casacas: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ tenidas.
- Placa peruana ABC-123: $26^3 \cdot 10^3 = 17\,576\,000$.
- Sin repetir: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 11\,232\,000$.
- Subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$: cada elemento entra o no, 2^n.
- Ordenar n objetos: $n!$ (*permutations*).



Demo: ¿importa el orden? ¿hay repetición?

Problema

Ubica cada pregunta en la tabla y resuélvela ($n = 10$ opciones, se eligen $k = 3$):

1. Un PIN de 3 dígitos.
2. Oro, plata y bronce entre 10 corredores.
3. Un comité de 3 entre 10 personas.
4. Una bolsa de 3 frutas entre 10 tipos (se pueden repetir).

	con repetición	sin repetición
importa el orden	n^k **(1) PIN**	$\frac{n!}{(n-k)!}$ **(2) podio**
no importa el orden	$\binom{n+k-1}{k}$ **(4) frutas**	$\binom{n}{k}$ **(3) comité**

Solución

(1) orden sí, repetición sí: $10^3 = 1000$. (2) orden sí, sin repetición: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. (3) sin orden ni repetición: $\binom{10}{3} = \frac{720}{3!} = 120$. (4) sin orden, con repetición: $\binom{12}{3} = 220$.
El error clásico: responder 720 en (3). Cada comité aparece $3! = 6$ veces en la lista ordenada.

Demo: Monty Hall, contando los casos

El «cambio de variable» de la película

No preguntes «¿acerté?»; pregunta **«¿estoy parado en una cabra?»**.

- Eliges al azar: **2 de cada 3** veces estás en una cabra.
- Si estás en una cabra, el presentador está **obligado** a abrir la otra cabra: la puerta que queda es el auto. **Cambiar gana.**
- Si estás en el auto (1 de cada 3), cambiar pierde.

Contando

3 lugares del auto $\times$ 3 elecciones $=$ **9 casos** igual de probables (principio de conteo). Cambiar gana en **6 de 9** $= 2/3$; quedarse, en 3 de 9.

¿Y el 50–50?

Quedan dos puertas, pero **no** son igual de probables: el presentador sabe dónde está el auto.

Auto en	Eliges	Si te quedas	Si cambias
1	1	gana	pierde
1	2	pierde	gana
1	3	pierde	gana
2	1	pierde	gana
2	2	gana	pierde
2	3	pierde	gana
3	1	pierde	gana
3	2	pierde	gana
3	3	gana	pierde
	Total	**3 de 9**	**6 de 9**

Quedarse gana solo cuando acertaste de entrada (la diagonal).

Contenido

1. Contar sin equivocarse
2. Combinaciones y el coeficiente binomial
3. De contar a la binomial
4. Variables aleatorias y su PMF
5. Esperanza: el centro de masa
6. Linealidad e indicadores
7. Cierre

$\binom{n}{k}$: contar lo mismo de dos maneras

Definición y fórmula

$\binom{n}{k}$ = número de **subconjuntos de k elementos** de un conjunto de n:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Por qué: dos formas de armar una fila de k distintos

- Uno por uno: $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Primero el subconjunto, luego ordenarlo: $\binom{n}{k} \cdot k!$.

Igualando: $\binom{n}{k}\, k! = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Identidades que conviene reconocer

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad$ (con $0! = 1$).
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: elegir quién entra = elegir quién queda fuera.
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$: todos los subconjuntos.

Particiones (coeficiente multinomial)

Repartir n objetos distintos: n_1 a la persona 1, …, n_r a la persona r:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}.$$

Ej.: 9 objetos en grupos de 2, 3 y 4: $\frac{9!}{2!\,3!\,4!} = 1260$.

Demo: un comité de 3 entre 10

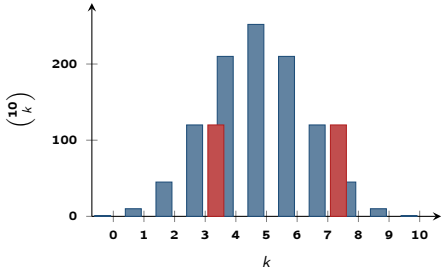
Problema

De 10 personas (6 hombres, 4 mujeres) se forma al azar un comité de 3.

1. ¿Cuántos comités hay? ¿Cuántas formas de dejar a 7 personas fuera?
2. ¿Probabilidad de que el comité sea solo de mujeres?
3. ¿Probabilidad de que tenga al menos un hombre?

Solución

(1) $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$, y también $\binom{10}{7} = 120$: cada comité queda definido por quiénes se quedan fuera.
(2) $\binom{4}{3} = 4$ comités solo de mujeres: $\frac{4}{120} = \frac{1}{30}$.
(3) Complemento de (2): $1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.



Simetría $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$; la suma de todas las barras es $2^{10} = 1024$.

Contenido

1. Contar sin equivocarse
2. Combinaciones y el coeficiente binomial
3. De contar a la binomial
4. Variables aleatorias y su PMF
5. Esperanza: el centro de masa
6. Linealidad e indicadores
7. Cierre

Probabilidades binomiales

n lanzamientos independientes, $\mathbb{P}(H) = p$

Una secuencia concreta: $\mathbb{P}(HTTHHH) = p^4(1-p)^2$.
Solo importa **cuántas** caras.

$$\mathbb{P}(k \text{ caras}) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\#\text{ secuencias}} \underbrace{p^k(1-p)^{n-k}}_{\text{cada una}}.$$

Una secuencia con k caras = un **subconjunto** de k posiciones: por eso $\binom{n}{k}$ y no $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Ejemplo de la Lecture 4

En 10 lanzamientos hubo **3 caras**.
¿Probabilidad de que las dos primeras sean cara?

$$\frac{p^2\binom{8}{1}p(1-p)^7}{\binom{10}{3}p^3(1-p)^7} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

Dado "3 caras", las 120 secuencias son **equiprobables**: basta contar. Y p **desaparece**.

Demo: 5 lanzamientos de una moneda sesgada

Problema

Una moneda cae cara con $p = 0{,}3$. Se lanza 5 veces. Calcula la probabilidad de obtener exactamente 2 caras, y la de obtener al menos una.

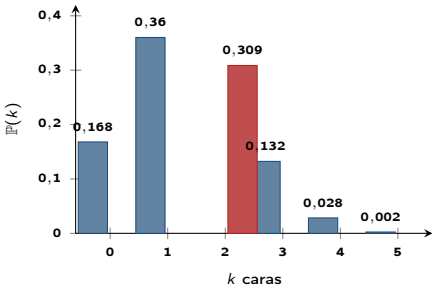
Solución

Hay $\binom{5}{2} = 10$ secuencias con 2 caras, cada una con probabilidad $(0{,}3)^2(0{,}7)^3 = 0{,}03087$:

$$\mathbb{P}(2 \text{ caras}) = 10 \cdot 0{,}03087 = 0{,}3087.$$

Al menos una: $1 - (0{,}7)^5 = 1 - 0{,}168 = 0{,}832$.

Error clásico: olvidar el $\binom{5}{2}$ y responder 0,03087, que es la probabilidad de *una* secuencia concreta, como $HHTTT$.



Bin(5; 0,3): el valor más probable es $k = 1$.

Contenido

1. Contar sin equivocarse
2. Combinaciones y el coeficiente binomial
3. De contar a la binomial
4. Variables aleatorias y su PMF
5. Esperanza: el centro de masa
6. Linealidad e indicadores
7. Cierre

Variable aleatoria y PMF

Random variable

Una **función** $X : \Omega \to \mathbb{R}$: asigna un número a cada resultado.

- X (mayúscula): la v.a., la *regla*. x (minúscula): un número.
- "$X = x$" es un **evento**: $\{\omega : \ X(\omega) = x\}$.
- Una función de v.a. es otra v.a.: $X + Y$, X^2, W/H^2.

Probability mass function

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \qquad p_X(x) \geq 0, \qquad \sum_x p_X(x) = 1.$$

Receta: para cada x, juntar los ω con $X(\omega) = x$ y sumar sus probabilidades.

El catálogo discreto

Nombre	$p_X(k)$	modela
Bernoulli(p)	$p^k(1-p)^{\mathbf{1}-k}$, $k \in \{0,1\}$	un ensayo
Uniforme $\{a..b\}$	$\frac{\mathbf{1}}{b-a+\mathbf{1}}$	ignorancia total
Bin(n, p)	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	éxitos en n
Geométrica(p)	$(1-p)^{k-\mathbf{1}}p$, $k \geq 1$	tiempo de espera

Dos convenciones para la geométrica

En 6.431x cuenta **intentos** ($k = 1, 2, \ldots$). R (`dgeom`) cuenta **fracasos** ($k = 0, 1, \ldots$). Revisa el soporte antes de usar una fórmula.

Demo: la suma de dos dados de 4 caras

Problema (Lecture 5)

Se lanza dos veces un dado justo de 4 caras. Sea $Z = X + Y$. Calcula la PMF de Z.

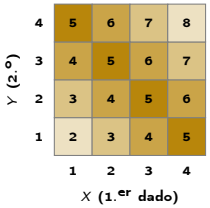
Solución

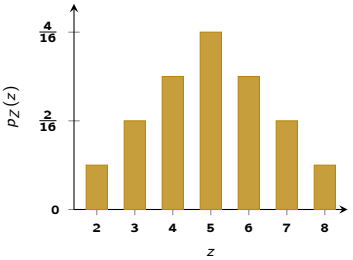
Los 16 pares valen 1/16 cada uno. Cada **diagonal** de la cuadrícula es un valor de Z:

$$p_Z(z) = \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}, \frac{3}{16}, \frac{2}{16}, \frac{1}{16}$$

para $z = 2, \ldots, 8$.

Error clásico: suponer que la suma es uniforme (1/7 cada valor). Los pares son equiprobables; los **valores** de Z, no.





Contenido

1. Contar sin equivocarse
2. Combinaciones y el coeficiente binomial
3. De contar a la binomial
4. Variables aleatorias y su PMF
5. Esperanza: el centro de masa
6. Linealidad e indicadores
7. Cierre

Expectation: promedio de largo plazo y centro de masa

Definición

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\, p_X(x) \qquad \Big(\text{si } \textstyle\sum_x |x|\, p_X(x) < \infty\Big).$$

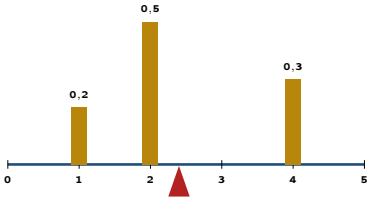
Dos lecturas (juego de la Lecture 5)

Paga 1, 2 o 4 con probabilidades 0,2, 0,5 y 0,3.

- **Frecuencias**: en 1000 jugadas, $\approx$ 200 veces 1, 500 veces 2, 300 veces 4. Promedio $\frac{200+1000+1200}{1000} = 2{,}4$.
- **Física**: pesos $p_X(x)$ sobre una barra; $\mathbb{E}[X]$ es el punto de equilibrio.

Propiedades

$X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0$; $\quad a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$; $\quad \mathbb{E}[c] = c$.



$\mathbb{E}[X] = 2{,}4$ es un valor que X **nunca** toma.

Demo: la esperanza de la binomial y de la geométrica

Problema

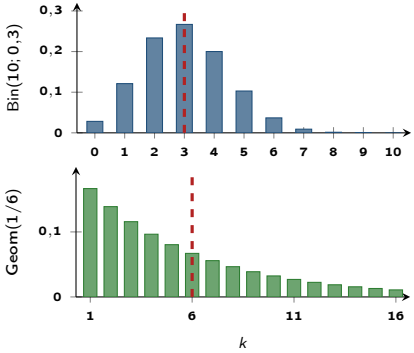
(a) Lanzas 10 veces una moneda con $p = 0{,}3$: ¿cuántas caras esperas?
(b) Lanzas un dado hasta el primer 6: ¿cuántos lanzamientos esperas?

Solución

(a) $X \sim \text{Bin}(10;\, 0{,}3)$, así que $\mathbb{E}[X] = np = 3$. Con indicadores: $X = I_1 + \cdots + I_{10}$ y cada $\mathbb{E}[I_i] = p$.
(b) Geométrica con $p = 1/6$. Con $q = 1 - p$,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 1} k\, q^{k-1} p = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} = 6.$$

Sanity check: si p baja, se espera **más**. (En la Clase 5 lo probaremos en dos líneas.)



Línea roja: $\mathbb{E}[X]$. En la geométrica la media queda **lejos** de la moda ($k = 1$).

Contenido

1. Contar sin equivocarse
2. Combinaciones y el coeficiente binomial
3. De contar a la binomial
4. Variables aleatorias y su PMF
5. Esperanza: el centro de masa
6. Linealidad e indicadores
7. Cierre

Regla del valor esperado y linealidad

Expected value rule

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$$

No hace falta calcular antes la PMF de $g(X)$.

En general $\mathbb{E}[g(X)] \neq g(\mathbb{E}[X])$

Juego anterior:
$\mathbb{E}[X^2] = 1(0{,}2) + 4(0{,}5) + 16(0{,}3) = 7$, pero $(\mathbb{E}[X])^2 = 5{,}76$. Solo las funciones **lineales** pasan a través de $\mathbb{E}$.

Linealidad

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\,\mathbb{E}[X] + b$$

Sueldos $\times 2$ y $+100$ soles: el promedio también se duplica y sube 100 soles.

Para sumas (adelanto de la Lecture 6)

$$\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]$$

sean o no independientes. Estrategia: escribir un conteo como suma de **indicadores** y usar $\mathbb{E}[I_A] = \mathbb{P}(A)$.

Demo: el problema de los sombreros

Problema

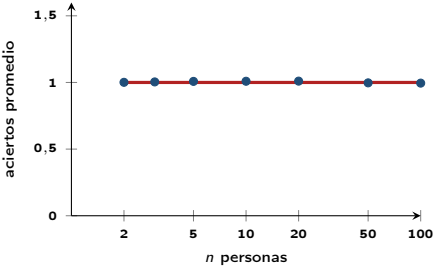
n personas dejan su sombrero en una caja y cada una saca uno al azar. ¿Cuántas personas recuperan **su** sombrero, en promedio?

Solución

La PMF del número de aciertos X es complicada. Con indicadores no hace falta: $I_i = 1$ si la persona i recupera el suyo, y $\mathbb{P}(I_i = 1) = \frac{1}{n}$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[I_i] = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \quad \text{para todo } n.$$

Los I_i **no** son independientes (si $n-1$ aciertan, el último también) y aun así la linealidad vale.
Error clásico: pensar que hace falta independencia para sumar esperanzas.



Puntos: simulación en R (20 000 repeticiones por n).

Línea: $\mathbb{E}[X] = 1$.

Contenido

1. Contar sin equivocarse
2. Combinaciones y el coeficiente binomial
3. De contar a la binomial
4. Variables aleatorias y su PMF
5. Esperanza: el centro de masa
6. Linealidad e indicadores
7. Cierre

Kahoot de repaso (Clase 4)

Jugamos ahora

10 preguntas sobre **conteo, PMFs y esperanza**: principio de conteo, combinaciones, binomial, geométrica, suma de dados, regla del valor esperado, linealidad e indicadores. Las 3 primeras son de calentamiento (30 s); el resto, de 1 a 1,5 min. Unos 10 minutos.

- Cada pregunta tiene una **trampa**: el error clásico está entre las opciones.
- Antes de contar: **¿importa el orden? ¿hay repetición?**
- En la geométrica: ¿cuenta **intentos** o **fracasos**?
- Antes de mover una función dentro de $\mathbb{E}$: ¿es **lineal**?

Resumen de la Clase 4

Lo que hay que saber hacer

1. Contar en **etapas** $(n_1 n_2 \cdots n_r)$ y ubicar un problema en la tabla orden $\times$ repetición.
2. Usar $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ para subconjuntos y $\frac{n!}{n_1!\cdots n_r!}$ para particiones; probar identidades **contando dos veces**.
3. Calcular probabilidades binomiales $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ y reconocer cuándo, dado el número de éxitos, las secuencias son equiprobables.
4. Calcular una **PMF** juntando resultados y sumando; verificar que sume 1.
5. Reconocer Bernoulli, uniforme, binomial y geométrica, con sus medias p, $\frac{a+b}{2}$, np y $\frac{1}{p}$.
6. Aplicar la regla del valor esperado sin caer en $\mathbb{E}[g(X)] = g(\mathbb{E}[X])$.
7. Calcular la esperanza de un conteo con **indicadores** y linealidad.

Siguiente clase (Clase 5)

El resto de la Unit 4: **varianza**, condicionar una v.a. en un evento, *total expectation*, PMF conjunta e independencia de variables aleatorias.

¡Gracias!

Clase 4 — Conteo, PMFs y esperanza (6.431x, Units 3 y 4)

clazoq@uni.pe · linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe · github.com/CristianLazoQuispe

BREIT (Brescia Institute of Technology) · Aporta — Grupo Breca · en alianza con MIT IDSS

Basado en MIT 6.431x / MIT OCW RES.6-012 (Bertsekas & Tsitsiklis), CC BY-NC-SA 4.0.