Densidades (PDFs), condicionamiento y múltiples variables aleatorias continuas

Clase 6: *PDFs*, *CDFs*, uniforme, exponencial, normal, *conditioning* y *joint PDFs*

6.431x — Probability: The Science of Uncertainty and Data

(versión de clase: las soluciones se comparten al terminar)

B.Sc. Cristian Lazo Quispe

BREIT (Brescia Institute of Technology) · Aporta — Grupo Breca

Programa SDS (Statistics and Data Science, MITx) · **BREIT** (Brescia Institute of Technology), iniciativa de Aporta —Grupo Breca— en alianza con MIT IDSS.
Basado en MIT 6.431x / MIT OCW RES.6-012 (CC BY-NC-SA 4.0).

clazoq@uni.pe · linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe · github.com/CristianLazoQuispe

Dónde quedamos (Clase 5)

Variables aleatorias discretas, en tres líneas

La **PMF** $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ reparte la masa en puntos. $\mathbb{E}[X] = \sum_x x\, p_X(x)$, $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$. Condicionar es **encoger el universo y renormalizar**. La PMF conjunta $p_{X,Y}$ es una tabla; las marginales se obtienen **sumando** filas o columnas.

El salto de hoy: de sumas a integrales

- La masa ya no está en puntos: se **unta** sobre la recta. La función que dice cuánta masa hay por unidad de longitud es la **densidad** f_X.
- **Todo lo de la Clase 5 sobrevive** cambiando $\sum$ por $\int$ y p_X por f_X: esperanza, varianza, condicionamiento, conjuntas y marginales.
- Lo nuevo: $\mathbb{P}(X = x) = 0$ para todo x, la densidad **puede valer más que 1**, y aparecen tres protagonistas: **uniforme, exponencial y normal**.

Cómo trabajaremos hoy

Primero la teoría de cada sección con ejemplos simples; al final, **cinco problemas difíciles**: el enunciado (lo desarrollamos juntos en la pizarra) y después la solución escrita paso a paso.

¿Qué veremos hoy? (Unit 5 — Lectures 8 y 9)

1. La densidad no es una probabilidad; la CDF
2. La exponencial y la falta de memoria
3. La normal y la tabla Z
4. Condicionar en un evento; v.a. mixtas; probabilidad total
5. PDF conjunta, marginales y CDF conjunta
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

Contenido

1. La densidad no es una probabilidad; la CDF
2. La exponencial y la falta de memoria
3. La normal y la tabla Z
4. Condicionar en un evento; v.a. mixtas; probabilidad total
5. PDF conjunta, marginales y CDF conjunta
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

Probability density function: la probabilidad es un área

Definición

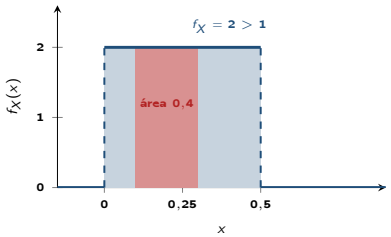
X es **continua** si existe $f_X \geq 0$ tal que, para todo intervalo,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx.$$

Condición de normalización: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$ (área total 1).

Tres consecuencias que sorprenden

- $\mathbb{P}(X = x) = \int_x^x f_X = 0$ para **todo** x. "Probabilidad cero" no es "imposible": algún valor sale.
- Por lo anterior, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b)$: los extremos no importan.
- $f_X(x)$ **no es una probabilidad**: es una *densidad*, probabilidad por unidad de longitud. Puede valer 2, 10 o 1000. Lo que es ≤ 1 es el área.



$X \sim \text{Unif}(0, \frac{1}{2})$: densidad 2 en $[0, \frac{1}{2}]$. Área total $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$;
$\mathbb{P}(0{,}1 \leq X \leq 0{,}3) = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$.

Interpretación de $f_X(x)$

Para δ pequeño, $\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \delta) \approx f_X(x)\, \delta$. La densidad compara **qué tan probable es estar cerca** de x frente a estar cerca de otro punto.

Esperanza, varianza y la función de distribución (CDF)

Las mismas fórmulas, con integrales

$$\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x)\,dx, \qquad \mathbb{E}[g(X)] = \int g(x) f_X(x)\,dx$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2, \qquad \mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X] + b.$$

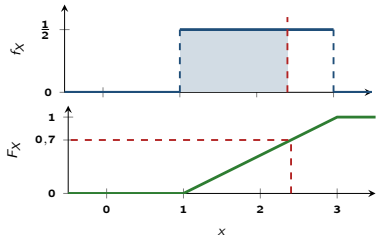
Uniforme $\mathrm{Unif}(a,b)$: $f_X = \frac{1}{b-a}$ en $[a,b]$, $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Cumulative distribution function

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \qquad f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x).$$

Sirve para **toda** v.a. (discreta: escalera; continua: curva continua; mixta: ambas). Propiedades: no decreciente, $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$, continua por la derecha.

$$\mathbb{P}(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a).$$



Unif(1, 3). El área sombreada hasta $x = 2{,}4$ (0,7) es la **altura** de la CDF en 2,4. La pendiente de F_X es la densidad.

Contenido

1. La densidad no es una probabilidad; la CDF
2. La exponencial y la falta de memoria
3. La normal y la tabla Z
4. Condicionar en un evento; v.a. mixtas; probabilidad total
5. PDF conjunta, marginales y CDF conjunta
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

La exponencial: el tiempo hasta que algo pasa

Definición: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$

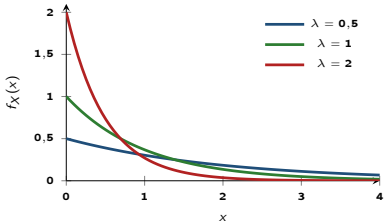
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ (x \geq 0), \qquad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

$$\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}, \qquad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

λ es una **tasa** (eventos por unidad de tiempo); $1/\lambda$ es la espera media.

Es la versión continua de la geométrica

La geométrica cuenta **intentos** hasta el primer éxito; la exponencial mide el **tiempo** hasta el primer evento cuando "en cada instante" hay una chance pequeña. Modela: tiempo hasta que llega la siguiente combi, hasta que falla un foco, entre dos llamadas a un *call center*, hasta el siguiente sismo leve.



En $x = 0$ la densidad vale λ (con $\lambda = 2$, vale 2). A mayor tasa, la masa se concentra cerca de 0 y la espera media $1/\lambda$ es menor.

Ejemplo rápido: la batería

La batería de un celular dura $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ horas con media 2: $\lambda = \frac{1}{2}$. $\mathbb{P}(X > 3) = e^{-1{,}5} \approx 0{,}223$; $\mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - e^{-0{,}5} \approx 0{,}393$; $\sigma_X = 1/\lambda = 2$ h (en la exponencial, media y desviación coinciden).

Falta de memoria (*memorylessness*): la combi no "acumula" retraso

Propiedad

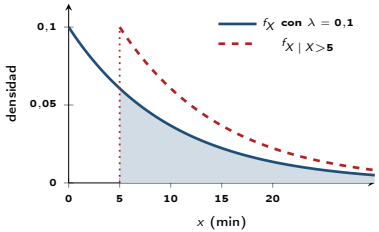
Si $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, para todo $s, t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}.$$

Dado que ya esperaste s, el tiempo **adicional** $X - s$ vuelve a ser $\mathrm{Exp}(\lambda)$: la distribución condicional "arranca de cero".

Por qué importa

- Es **la única** distribución continua con esta propiedad (como la geométrica entre las discretas).
- "Llevo 20 minutos esperando, ya debe estar por llegar" es **falso** bajo este modelo: el futuro no depende de cuánto llevas esperando.
- Es la base del **proceso de Poisson** (Clase 13).



Condicionar en $X > 5$ borra la masa antes de 5 y reescala la cola (área azul, $e^{-0{,}5}$) para que vuelva a tener área 1. El resultado es la misma exponencial, **desplazada** a empezar en 5.

Contenido

1. La densidad no es una probabilidad; la CDF
2. La exponencial y la falta de memoria
3. La normal y la tabla Z
4. Condicionar en un evento; v.a. mixtas; probabilidad total
5. PDF conjunta, marginales y CDF conjunta
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

La normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: la campana

Definición

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

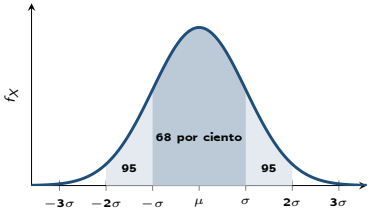
Simétrica alrededor de μ; σ fija el "ancho". $\mathcal{N}(0,1)$ es la **normal estándar**; su v.a. se llama Z y su CDF, $\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \le z)$.

Dos hechos que hacen todo el trabajo

1. **Linealidad**: si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y $a \neq 0$, entonces $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)$. Sigue siendo normal.
2. **Estandarizar**: $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, luego

$$\mathbb{P}(X \le x) = \Phi\left(\tfrac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Por eso basta **una** tabla: la de Φ.



Regla 68–95–99,7: a $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$ y $\pm 3\sigma$ de la media hay el 68, 95 y 99,7 por ciento del área. Vale para **cualquier** μ y σ.

¿Por qué es tan importante?

Suma de muchos efectos pequeños e independientes $\approx$ normal (Teorema Central del Límite, Clase 11). Alturas, errores de medición, notas, ruido.

Cómo se lee la tabla Z (y los valores que conviene memorizar)

La tabla da $\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \le z)$ para $z \ge 0$

- Negativos por simetría: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.
- Cola derecha: $\mathbb{P}(Z > z) = 1 - \Phi(z)$.
- Intervalo: $\mathbb{P}(a < X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.
- Simétrico: $\mathbb{P}(|Z| \le z) = 2\Phi(z) - 1$.

Al revés: de probabilidad a z (cuantiles)

$\Phi(z)$	0,90	0,95	0,975	0,99
z	1,28	1,645	1,96	2,33

Se buscan **dentro** de la tabla y se lee el z del borde.

Ejemplo rápido: notas $\mathcal{N}(70, 25)$

$\sigma = \sqrt{25} = 5$. $\mathbb{P}(X \le 80) = \Phi\left(\frac{80-70}{5}\right) = \Phi(2) = 0{,}9772$; $\mathbb{P}(65 < X \le 75) = 2\Phi(1) - 1 = 0{,}6826$.

Mini tabla $\Phi(z)$ (la completa está en el PDF de teoría)

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,5000	1,50	0,9332
0,50	0,6915	1,645	0,9500
1,00	0,8413	1,96	0,9750
1,25	0,8944	2,00	0,9772
1,28	0,8997	2,50	0,9938
1,40	0,9192	3,00	0,9987

Los dos errores que más puntos cuestan

1. Entrar a la tabla **sin estandarizar** (x en vez de $(x-\mu)/\sigma$).
2. Dividir entre σ^2 en vez de σ. Si te dan Var $= 16$, $\sigma = 4$.

Contenido

1. La densidad no es una probabilidad; la CDF
2. La exponencial y la falta de memoria
3. La normal y la tabla Z
4. Condicionar en un evento; v.a. mixtas; probabilidad total
5. PDF conjunta, marginales y CDF conjunta
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

Condicionar una v.a. continua en un evento: recortar y renormalizar

Definición

Si $\mathbb{P}(A) > 0$,

$$f_{X \mid A}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\mathbb{P}(A)}, & x \in A, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Misma forma, **recortada** a A y **estirada** para que el área vuelva a ser 1. $\mathbb{E}[X \mid A] = \int x f_{X \mid A}(x)\, dx$, $\mathbb{E}[g(X) \mid A]$ igual.

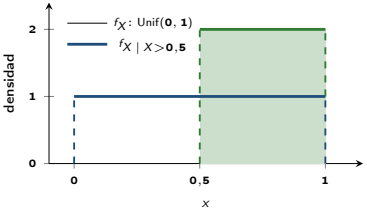
Teorema de probabilidad total (versión continua)

Si $A_1, \ldots, A_n$ parten el espacio muestral,

$$f_X(x) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)\, f_{X \mid A_i}(x),$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{E}[X \mid A_i].$$

La densidad total es una **mezcla** de densidades condicionales.



$X \sim \text{Unif}(0,1)$ dado $X > \frac{1}{2}$: se borra $[0, \frac{1}{2})$ y la altura se divide entre $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$. Resulta $\text{Unif}(\frac{1}{2}, 1)$, con $\mathbb{E}[X \mid A] = \frac{3}{4}$.

Ejemplo de mezcla

Un paquete llega por moto ($\mathbb{P} = 0{,}7$, tiempo $\text{Unif}(0,1)$ h) o por auto ($0{,}3$, $\text{Unif}(1,3)$ h).
$f_X(x) = 0{,}7 \cdot 1$ en $[0,1)$ y $0{,}3 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}15$ en $[1,3]$.
$\mathbb{E}[X] = 0{,}7(0{,}5) + 0{,}3(2) = 0{,}95$ h.

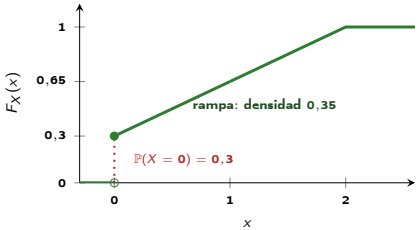
Variables aleatorias mixtas: una CDF con rampas y saltos

Qué son

Una v.a. **mixta** tiene parte discreta (átomos: puntos con probabilidad positiva) y parte continua (densidad). Ejemplos: mín(X, c) con X continua; "con probabilidad p vale 0, si no es exponencial"; el tiempo de espera cuando a veces no hay cola.

Cómo se trabajan

- **La CDF lo describe todo**: salta en los átomos (tamaño del salto = su probabilidad) y sube como rampa donde hay densidad.
- **Probabilidad total**: condicionar en "cayó en el átomo" o "cayó en la parte continua". $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(\text{disc})\,\mathbb{E}[X \mid \text{disc}] + \mathbb{P}(\text{cont})\,\mathbb{E}[X \mid \text{cont}]$.
- Para $X \geq 0$: $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\,dx$ (vale siempre, mixtas incluidas).



"Con probabilidad 0,3 no hay cola ($X = 0$); si la hay, $X \sim \text{Unif}(0, 2)$." CDF: salto 0,3 en 0 y después rampa de pendiente $0{,}7 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}35$. $\mathbb{E}[X] = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}7 \cdot 1 = 0{,}7$.

Error clásico

Intentar escribir una "PDF" con un pico infinito en el átomo. No hace falta: usa la CDF o la probabilidad total.

Contenido

1. La densidad no es una probabilidad; la CDF
2. La exponencial y la falta de memoria
3. La normal y la tabla Z
4. Condicionar en un evento; v.a. mixtas; probabilidad total
5. PDF conjunta, marginales y CDF conjunta
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

PDF conjunta: la probabilidad es un volumen

Definición

X, Y son **conjuntamente continuas** si existe $f_{X,Y} \geq 0$ con

$$\mathbb{P}((X,Y) \in B) = \iint_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy, \qquad \iint f_{X,Y} = 1.$$

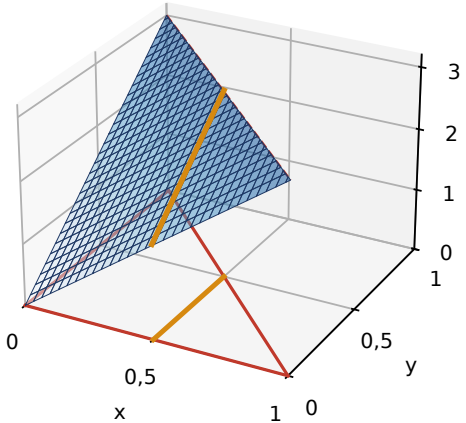
$f_{X,Y}(x,y)\,\delta^2 \approx \mathbb{P}(x \leq X \leq x+\delta,\ y \leq Y \leq y+\delta)$: densidad por unidad de **área**.

Marginales: integrar la otra variable

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx.$$

En la Clase 5 **sumábamos** la fila; ahora **integramos** la franja. Los límites de la integral los dicta **la región** donde $f_{X,Y} > 0$, no siempre $(-\infty, \infty)$.

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \iint g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$



$f_{X,Y}(x,y) = 3(x+y)$ sobre el triángulo $x, y \geq 0$, $x+y \leq 1$ (el Problema 5). El volumen bajo la superficie es 1. La franja naranja en $x = 0{,}5$ es lo que se integra para obtener $f_X(0{,}5)$.

La receta de la franja; la CDF conjunta

Receta para $f_X(x)$ en una región no rectangular

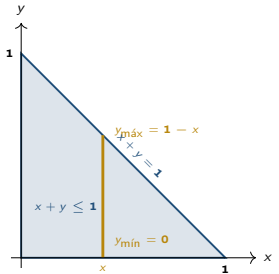
1. Dibuja la región donde $f_{X,Y} > 0$.
2. Fija un x y traza la **franja vertical**: ¿entre qué $y_{\text{mín}}(x)$ y $y_{\text{máx}}(x)$ está dentro?
3. $f_X(x) = \int_{y_{\text{mín}}(x)}^{y_{\text{máx}}(x)} f_{X,Y}(x,y)\,dy$. Repite para cada "tipo" de x.
4. Chequea: $\int f_X = 1$.

Si la región **no es un rectángulo**, X e Y **no** pueden ser independientes (saber x restringe los y posibles). Formalizamos la independencia en la Clase 7.

CDF conjunta (*joint CDF*)

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \le x,\ Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x\,\partial y}(x,y).$$



La franja en x va de $y = 0$ a $y = 1 - x$. Por eso $f_X(x) = \int_0^{1-x} f_{X,Y}(x,y)\,dy$: el límite superior depende de x.

Contenido

1. La densidad no es una probabilidad; la CDF
2. La exponencial y la falta de memoria
3. La normal y la tabla Z
4. Condicionar en un evento; v.a. mixtas; probabilidad total
5. PDF conjunta, marginales y CDF conjunta
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

Cómo trabajaremos los cinco problemas

El formato

Cada problema ocupa un slide casi en blanco: lo **desarrollamos juntos en la pizarra**. La solución escrita, paso a paso, se comparte al **final de la clase** (versión completa de estos slides en OneDrive): hoy, atención a la pizarra.

Los cinco problemas y la sección de teoría que usan

1. El tiempo de un delivery: **PDF a trozos, CDF y esperanza** (sección 1).
2. La combi que no llega: **exponencial sin memoria y una v.a. mixta** (secciones 2 y 4).
3. ¿A qué hora salgo?: **la normal y la tabla** Z, en las dos direcciones (sección 3).
4. Dos amigos en el paradero: **condicionar en un evento** en dos dimensiones (sección 4).
5. Una densidad sobre un triángulo: **conjunta, marginal y condicional** (sección 5).

Antes de cada uno

Dibuja la región o la curva, identifica qué es área y qué es altura, y decide los **límites de integración** antes de integrar nada.

Problema 1: el tiempo de un delivery (PDF a trozos)

El tiempo X (en horas) que tarda un pedido de delivery en Lima tiene densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & 0 \le x < 1, \\ 3c, & 1 \le x \le 1{,}5, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a. Halla c (¿es $3c$ una probabilidad?) y calcula $\mathbb{P}(0{,}5 < X < 1{,}25)$.

b. Construye la CDF $F_X(x)$ a trozos y calcula $\mathbb{E}[X]$.

Problema 2: la combi que no llega (exponencial y una v.a. mixta)

El tiempo X (en minutos) hasta que pasa la siguiente combi por tu paradero es $\mathrm{Exp}(\lambda)$ con espera media de 10 minutos.

a. Halla λ y $\mathbb{P}(X > 10)$. Demuestra que $\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$ y úsalo para calcular $\mathbb{P}(X > 15 \mid X > 5)$.

b. Si a los 10 minutos no pasa la combi, tomas un taxi. Sea $Y = \min(X, 10)$ el tiempo que realmente esperas. Dibuja F_Y (¿dónde salta y cuánto?) y calcula $\mathbb{E}[Y]$.

Problema 3: ¿a qué hora salgo? (la normal y la tabla Z)

Adaptado de "Normal random variables" (*Problem Set 5*, MIT 6.431x). El tiempo T (en minutos) de tu viaje al trabajo es normal con media 40.

a. Si $\sigma = 8$, calcula $\mathbb{P}(T > 50)$ y $\mathbb{P}(30 < T \leq 50)$.

b. Ahora σ es desconocida. Se sabe que $T > 60$ (llegas más de 20 minutos tarde) el 5 por ciento de los días. Halla σ.

Problema 4: dos amigos en el paradero (condicionar en un evento continuo)

Dos amigos llegan al paradero en instantes X e Y (en horas, entre las 8 y las 9 am) independientes y uniformes en $[0,1]$, de modo que $f_{X,Y}(x,y) = 1$ en el cuadrado unitario. Sea $A = \{X > Y\}$ el evento "el primero llegó *después* que el segundo".

a. Calcula $\mathbb{P}(A)$, escribe $f_{X,Y \mid A}(x,y)$ y halla la marginal condicional $f_{X \mid A}(x)$ con $\mathbb{E}[X \mid A]$.

b. Calcula $\mathbb{P}(X > \tfrac{1}{2} \mid A)$ y comprueba que $\mathbb{P}(A)\mathbb{E}[X \mid A] + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{E}[X \mid A^c] = \mathbb{E}[X]$.

Problema 5: una densidad sobre un triángulo (conjunta, marginal y condicional)

Inspirado en "A joint PDF on a triangular region" y "A joint PDF given by a simple formula" (*Problem Set 5*, MIT 6.431x). Sean X, Y con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,(x+y), & x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a. Halla c y la marginal $f_X(x)$; calcula $\mathbb{E}[X]$.

b. Halla la densidad condicional $f_{Y \mid X}(y \mid x)$ y calcula $\mathbb{E}[Y \mid X = \frac{1}{2}]$. ¿Son X e Y independientes?

Contenido

1. La densidad no es una probabilidad; la CDF
2. La exponencial y la falta de memoria
3. La normal y la tabla Z
4. Condicionar en un evento; v.a. mixtas; probabilidad total
5. PDF conjunta, marginales y CDF conjunta
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

Resumen de la Clase 6

Lo que hay que saber hacer

1. Leer una **PDF**: probabilidades como **áreas**; f_X puede superar 1; $\mathbb{P}(X = x) = 0$. Normalizar una PDF a trozos.
2. Pasar de PDF a **CDF** (acumular tramo a tramo) y de CDF a PDF (derivar); calcular $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$ y la mediana.
3. Manejar la **uniforme** ($\frac{a+b}{2}$, $\frac{(b-a)^2}{12}$) y la **exponencial** ($\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$, media $1/\lambda$, **sin memoria**).
4. **Estandarizar** una normal y leer la tabla Z en los dos sentidos; usar $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
5. **Condicionar en un evento**: recortar y renormalizar ($f_X/\mathbb{P}(A)$), en una o dos dimensiones; probabilidad total; v.a. **mixtas** vía la CDF.
6. **PDF conjunta**: probabilidad = volumen; **marginal** = **integrar la franja** con los límites de la región; condicional = $f_{X,Y}/f_X$; CDF conjunta.

Errores clásicos de esta unidad

Leer $f_X(x)$ como probabilidad · confundir PDF con CDF · creer que $\mathbb{P}(X = x) = 0$ es "imposible" · entrar a la tabla Z sin estandarizar (o con σ^2) · olvidar la constante de normalización · sacar la marginal "fijando" la otra variable · integrar sobre el cuadrado cuando la región es un triángulo.

Siguiente clase (Clase 7)

Unit 5, L10 (Bayes continuo e independencia de v.a.) y **Unit 6, L11** (distribuciones derivadas: la densidad de $Y = g(X)$). Con eso queda la mitad del **Midterm 2**.

¡Gracias!

Clase 6 — Densidades, condicionamiento y múltiples v.a. continuas (6.431x, Unit 5)

clazoq@uni.pe · linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe · github.com/CristianLazoQuispe

BREIT (Brescia Institute of Technology) · Aporta — Grupo Breca · en alianza con MIT IDSS

Basado en MIT 6.431x / MIT OCW RES.6-012 (Bertsekas & Tsitsiklis), CC BY-NC-SA 4.0.