Sumas de variables independientes, covarianza y esperanza condicional

Clase 8: *convolution*, *covariance*, *correlation*, *iterated expectations* y *total variance*

6.431x — Probability: The Science of Uncertainty and Data

(versión de clase: las soluciones se comparten al terminar)

B.Sc. Cristian Lazo Quispe

BREIT (Brescia Institute of Technology) · Aporta — Grupo Breca

Programa SDS (Statistics and Data Science, MITx) · **BREIT** (Brescia Institute of Technology), iniciativa de Aporta —Grupo Breca— en alianza con MIT IDSS.

Basado en MIT 6.431x / MIT OCW RES.6-012 (CC BY-NC-SA 4.0).

clazoq@uni.pe · linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe · github.com/CristianLazoQuispe

Dónde quedamos (Clase 7)

Bayes continuo y distribuciones derivadas, en tres líneas

Condicionar en $Y = y$ es **cortar la conjunta y renormalizar**: $f_{X \mid Y} = f_{X,Y}/f_Y$. $X \perp\!\!\!\perp Y$ si $f_{X,Y} = f_X f_Y$ en todo el plano, y Bayes funciona igual con densidades. La densidad de $Y = g(X)$ sale por el **método de la CDF** (siempre) o por la fórmula del caso monótono $f_X(h(y))\,|h'(y)|$.

Lo de hoy: tres preguntas que la Clase 7 dejó abiertas

- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, ¿cuál es la distribución de $X + Y$? La **convolución**: voltear, desplazar, multiplicar y sumar. La suma de normales independientes sigue siendo normal.
- ¿Cómo se mide **cuánto** se mueven juntas dos variables? La **covarianza** y la **correlación** ρ; con ellas, la varianza de una suma cualquiera.
- $\mathbb{E}[X \mid Y]$ y $\mathrm{Var}(X \mid Y)$ son **variables aleatorias**: la ley de esperanzas iteradas, la **ley de la varianza total** y las sumas de un número aleatorio de términos.

Cómo trabajaremos hoy

Primero la teoría de cada sección con ejemplos simples; al final, **cinco problemas difíciles**: el enunciado (lo desarrollamos juntos en la pizarra) y después la solución escrita paso a paso.

¿Qué veremos hoy? (Unit 6 — Lectures 12 y 13)

1. Sumar variables independientes: la convolución
2. Covarianza y la varianza de una suma
3. Correlación: qué mide y qué no
4. La esperanza condicional como variable aleatoria
5. Ley de la varianza total y sumas aleatorias
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

Contenido

1. Sumar variables independientes: la convolución
2. Covarianza y la varianza de una suma
3. Correlación: qué mide y qué no
4. La esperanza condicional como variable aleatoria
5. Ley de la varianza total y sumas aleatorias
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

La PMF de $X + Y$: la convolución discreta

Fórmula ($X \perp\!\!\!\perp Y$, discretas)

Para que $Z = X + Y$ valga z, si $X = x$ entonces Y debe valer $z - x$:

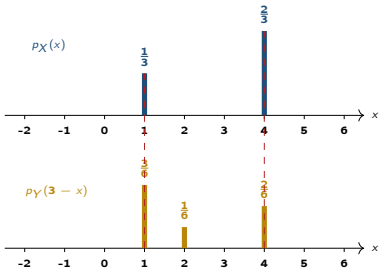
$$p_Z(z) = \sum_x \mathbb{P}(X = x,\ Y = z - x) = \sum_x p_X(x)\, p_Y(z - x).$$

La independencia es la que permite **multiplicar** las marginales.

La mecánica (*flip, shift, multiply, add*)

Para hallar $p_Z(z)$:

1. **Voltea** horizontalmente la PMF de Y: $p_Y(-x)$.
2. **Desplázala** z unidades a la derecha: $p_Y(z - x)$.
3. **Multiplica** punto a punto con $p_X(x)$ y **suma**.
4. Repite para cada valor de z.



Ejemplo de la Lecture 12: $p_X(1) = \frac{1}{3}$, $p_X(4) = \frac{2}{3}$; $p_Y(-1) = \frac{2}{6}$, $p_Y(1) = \frac{1}{6}$, $p_Y(2) = \frac{3}{6}$. Volteada y desplazada 3, la PMF de Y coincide con la de X en $x = 1$ y $x = 4$ (líneas rojas).

Resultado

$p_Z(3) = p_X(1)p_Y(2) + p_X(4)p_Y(-1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{18}$. Completa: $p_Z(0) = \frac{1}{9}$, $p_Z(2) = \frac{1}{18}$, $p_Z(5) = \frac{1}{9}$, $p_Z(6) = \frac{1}{3}$ (suman 1).

El caso continuo y la suma de normales independientes

Convolución continua ($X \perp\!\!\!\perp Y$)

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx.$$

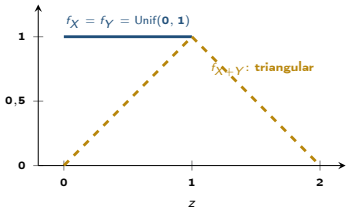
De dónde sale: dado $X = x$, $Z = x + Y$ es Y trasladada, así que $f_{Z \mid X}(z \mid x) = f_Y(z-x)$ (por la independencia). Entonces $f_{X,Z}(x,z) = f_X(x) f_Y(z-x)$ e integrar en x da la marginal de Z. **Misma mecánica** que en el caso discreto.

Suma de normales independientes

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ son independientes,

$$X + Y \sim \mathcal{N}\big(\mu_x + \mu_y,\ \sigma_x^2 + \sigma_y^2\big).$$

(Completar cuadrados dentro de la integral.) Más en general, **toda combinación lineal de finitas normales independientes es normal**. Ejemplo: $\mathcal{N}(1,4) + \mathcal{N}(2,9) = \mathcal{N}(3,13)$: la DE es $\sqrt{13} \approx 3{,}61$, **no** $2 + 3 = 5$.



Dos uniformes independientes en $[0,1]$: deslizar un rectángulo sobre otro da $f_Z(z) = z$ en $[0,1]$ y $2 - z$ en $[1,2]$. La suma no es uniforme: los valores centrales tienen más maneras de ocurrir.

Error clásico

Sumar desviaciones estándar. Con independencia se suman las **varianzas**:
$\text{SD}(X+Y) = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \le \sigma_x + \sigma_y$.

Contenido

1. Sumar variables independientes: la convolución
2. Covarianza y la varianza de una suma
3. Correlación: qué mide y qué no
4. La esperanza condicional como variable aleatoria
5. Ley de la varianza total y sumas aleatorias
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

Covarianza: ¿se mueven juntas?

Definición

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])\,(Y-\mathbb{E}[Y])\big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

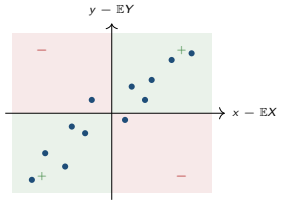
Positiva si los desvíos suelen tener el **mismo signo**; negativa si suelen tener signos opuestos.

Propiedades (salen de la linealidad)

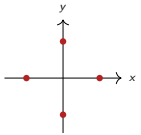
- $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$.
- $\mathrm{Cov}(aX+b,\ Y) = a\,\mathrm{Cov}(X,Y)$: la constante b no aporta.
- $\mathrm{Cov}(X,\ Y+Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z)$.
- $X \perp\!\!\!\perp Y \ \Rightarrow\ \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \ \Rightarrow\ \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

La recíproca es falsa

(X,Y) uniforme en los cuatro puntos $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$: siempre $XY = 0$ y $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, así que $\mathrm{Cov} = 0$. Pero si $X = 1$ entonces $Y = 0$: **no** son independientes.



Cada punto aporta el producto de sus desvíos: positivo en los cuadrantes verdes, negativo en los rojos. Aquí dominan los verdes: $\mathrm{Cov} > 0$.



Los cuatro puntos: incorrelados pero dependientes.

La varianza de una suma: aparece la covarianza

Dos variables

Desarrollando el cuadrado de $(X_1 - \mathbb{E}X_1) + (X_2 - \mathbb{E}X_2)$:

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2).$$

n variables

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

La segunda suma tiene $n^2 - n$ términos: con muchas variables, las covarianzas **dominan**. Si son incorreladas (en particular, independientes), solo quedan las varianzas.

Error clásico

Olvidar el $2\,\mathrm{Cov}$ y escribir $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}\,X + \mathrm{Var}\,Y$ sin independencia (o al menos incorrelación). Y $\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}\,X + \mathrm{Var}\,Y - 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$: las varianzas se **suman** también al restar.

Ejemplo de la Lecture 12: las correlaciones importan

Una inmobiliaria invierte en 10 estados; el retorno X_i tiene media 1 y DE 1,3 (millones). Media del total: 10.

- **Incorreladas**: $\mathrm{Var} = 10 \cdot 1{,}3^2 = 16{,}9$, DE $\approx 4{,}1$.
- $\rho(X_i, X_j) = 0{,}9$: $\mathrm{Cov} = 0{,}9 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}3 = 1{,}521$ y

$$\mathrm{Var} = 16{,}9 + 90 \cdot 1{,}521 = 153{,}8,$$

DE $\approx 12{,}4$.



Mismas inversiones, mismo retorno medio: el riesgo se triplica cuando los mercados se mueven juntos. Diversificar solo sirve si las

Contenido

1. Sumar variables independientes: la convolución
2. Covarianza y la varianza de una suma
3. Correlación: qué mide y qué no
4. La esperanza condicional como variable aleatoria
5. Ley de la varianza total y sumas aleatorias
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

El coeficiente de correlación ρ

Definición: la covarianza sin unidades

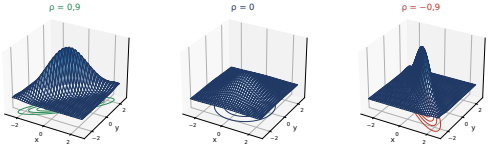
$$\rho(X,Y) = \mathbb{E}\Big[\frac{X-\mathbb{E}X}{\sigma_X}\cdot\frac{Y-\mathbb{E}Y}{\sigma_Y}\Big] = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}.$$

Propiedades

- $-1 \le \rho \le 1$, y $\rho(X,X) = 1$.
- $|\rho| = 1 \iff X - \mathbb{E}X = c\,(Y - \mathbb{E}Y)$: relación **lineal** exacta.
- $\rho(aX+b, Y) = \mathrm{sign}(a)\,\rho(X,Y)$: no cambia al cambiar de unidades (°C a °F), salvo el signo si $a<0$.
- $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \rho = 0$ ("incorreladas"); la recíproca es falsa.

Por qué $|\rho| \le 1$ (estandarizadas: media 0, varianza 1)

Entonces $\rho = \mathbb{E}[XY]$ y
$0 \le \mathbb{E}\big[(X-\rho Y)^2\big] = 1 - 2\rho^2 + \rho^2 = 1-\rho^2$. Si $|\rho| = 1$, la esperanza de un cuadrado es 0, así que $X = \rho Y$ con probabilidad 1.



Dos normales estándar con $\rho = 0{,}9$, 0 y $-0{,}9$: **las mismas marginales** $\mathcal{N}(0,1)$ y tres conjuntas distintas. Las curvas de nivel se inclinan según el signo de ρ.

Qué **no** mide ρ

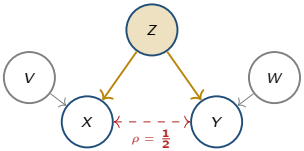
- Dependencia **no lineal**: con X simétrica e $Y = X^2$, $\rho = 0$ aunque Y esté determinada por X.
- **Causalidad**: asociación no implica causa ni influencia.

Interpretar ρ: el factor común escondido

Ejemplo de la Lecture 12

X: aptitud matemática; Y: habilidad musical. Suelen estar correlacionadas, pero no porque una cause la otra: ambas dependen de un **factor oculto** común. Modelo: Z, V, W independientes, media 0 y varianza 1, y

$$X = Z + V, \qquad Y = Z + W.$$



X e Y no se influyen: comparten Z. La flecha punteada es la asociación que vemos en los datos.

El cálculo

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(V) = 2$, igual $\mathrm{Var}(Y) = 2$.

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(Z + V)(Z + W)]$$

$$= \mathbb{E}[Z^2] + \underbrace{\mathbb{E}[ZW] + \mathbb{E}[VZ] + \mathbb{E}[VW]}_{=0} = 1.$$

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Lectura

La mitad de la variabilidad de cada una viene del factor común, y eso es ρ aquí. Si el factor común pesara más ($\mathrm{Var}\, Z = s^2$), $\rho = \frac{s^2}{s^2+1} \to 1$.

Contenido

1. Sumar variables independientes: la convolución
2. Covarianza y la varianza de una suma
3. Correlación: qué mide y qué no
4. La esperanza condicional como variable aleatoria
5. Ley de la varianza total y sumas aleatorias
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

$\mathbb{E}[X \mid Y]$ es una variable aleatoria

Definición

Para cada y, $g(y) = \mathbb{E}[X \mid Y = y]$ es un **número** (suma o integral con $p_{X \mid Y}$ o $f_{X \mid Y}$). Se define

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = g(Y) :$$

la variable aleatoria que vale $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ cuando $Y = y$. Es **función de** Y: tiene distribución, media y varianza.

Ley de esperanzas iteradas

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid Y]\big] = \mathbb{E}[X].$$

Es la esperanza total escrita en una línea:
$\mathbb{E}[g(Y)] = \sum_y g(y) p_Y(y) = \sum_y \mathbb{E}[X \mid Y = y] p_Y(y) = \mathbb{E}[X]$.

Error clásico

Tratar $\mathbb{E}[X \mid Y]$ como un número. $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ es un número; $\mathbb{E}[X \mid Y]$ es una variable aleatoria (se escribe con Y mayúscula).

Ejemplo: romper un palo (Lecture 13)

Palo de largo ℓ; se rompe en $Y \sim \text{Unif}(0, \ell)$ y lo que queda a la izquierda se rompe en X uniforme en $(0, Y)$.

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X \mid Y] = \frac{Y}{2}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\Big[\frac{Y}{2}\Big] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{4}.$$

Pronósticos que se revisan (*forecast revisions*)

X: ventas de febrero. En enero el pronóstico es $\mathbb{E}[X]$. A fin de enero llega el dato $Y = y$ y el pronóstico pasa a $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$. Visto desde enero, ese pronóstico revisado es la v.a. $\mathbb{E}[X \mid Y]$, y la ley dice:

$$\mathbb{E}[\text{pronóstico revisado}] = \mathbb{E}[X] = \text{pronóstico original}.$$

No se puede anticipar en qué dirección se revisará.

Ejemplo con un árbol: $\mathbb{E}[X \mid Y]$ tiene su propia PMF

Dos secciones de un curso (Lecture 13)

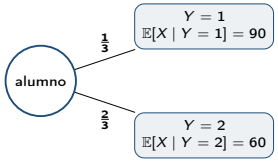
Sección 1: 10 alumnos, promedio 90. Sección 2: 20 alumnos, promedio 60. Se elige un alumno al azar; X es su nota e Y su sección.

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \begin{cases} 90 & \text{con prob. } \frac{1}{3} \ (Y = 1), \\ 60 & \text{con prob. } \frac{2}{3} \ (Y = 2). \end{cases}$$

Esperanzas iteradas

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid Y]\big] = \tfrac{1}{3} \cdot 90 + \tfrac{2}{3} \cdot 60 = 70 = \mathbb{E}[X],$$

que coincide con el promedio de los 30: $\frac{10 \cdot 90 + 20 \cdot 60}{30} = 70$. Promediar los promedios **con pesos** $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, no con $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (que daría 75).



Cada rama lleva un número $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$; con sus probabilidades forman la PMF de la v.a. $\mathbb{E}[X \mid Y]$. Su media es $\mathbb{E}[X]$.

Lo que sigue

Si $\mathbb{E}[X \mid Y]$ es una v.a., también tiene **varianza**: cuánto difieren las medias de las secciones. Ese es uno de los dos ingredientes de la ley de la varianza total.

Contenido

1. Sumar variables independientes: la convolución
2. Covarianza y la varianza de una suma
3. Correlación: qué mide y qué no
4. La esperanza condicional como variable aleatoria
5. Ley de la varianza total y sumas aleatorias
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

La ley de la varianza total

Varianza condicional como v.a.

$\mathrm{Var}(X \mid Y = y) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X \mid Y = y])^2 \mid Y = y\big]$ es un número; $\mathrm{Var}(X \mid Y)$ es la v.a. que vale eso cuando $Y = y$. Ejemplo: si X es uniforme en $[0, Y]$, $\mathrm{Var}(X \mid Y) = Y^2/12$.

Ley de la varianza total

$$\mathrm{Var}(X) = \underbrace{\mathbb{E}\big[\,\mathrm{Var}(X \mid Y)\big]}_{\text{variabilidad dentro}} + \underbrace{\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}[X \mid Y]\right)}_{\text{variabilidad entre}}.$$

Derivación: $\mathrm{Var}(X \mid Y) = \mathbb{E}[X^2 \mid Y] - (\mathbb{E}[X \mid Y])^2$; tomar esperanza y sumar $\mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y]) = \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X \mid Y])^2] - (\mathbb{E}X)^2$. Los términos cruzados se cancelan.

Las dos secciones, completas

Varianzas dentro de cada sección: 10 y 20.
$\mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y)] = \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{2}{3} \cdot 20 = \frac{50}{3}$.
$\mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y]) = \frac{1}{3}(90 - 70)^2 + \frac{2}{3}(60 - 70)^2 = 200$.
$\mathrm{Var}(X) = \frac{50}{3} + 200 = \frac{650}{3} \approx 216{,}7$.

Ejemplo simple de la Lecture 13

$f_X = \frac{1}{2}$ en $[0, 1]$ y $\frac{1}{4}$ en $(1, 3]$; $Y = 1$ si $X \le 1$, $Y = 2$ si no (prob. $\frac{1}{2}$ cada una). Dado Y, X es uniforme en un tramo:

- $\mathbb{E}[X \mid Y] \in \{\frac{1}{2}, 2\}$, $\mathrm{Var}(X \mid Y) \in \{\frac{1}{12}, \frac{4}{12}\}$.
- $\mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{12} = \frac{5}{24}$.
- $\mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y]) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{5}{4})^2 + \frac{1}{2}(2 - \frac{5}{4})^2 = \frac{9}{16}$.
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{5}{24} + \frac{9}{16} = \frac{37}{48}$.



La barra es $\mathrm{Var}(X)$: la mayor parte viene de que las medias de los tramos difieren.

Suma de un número aleatorio de variables independientes

Planteamiento (Lecture 13)

N: número de tiendas visitadas (entero ≥ 0). X_i: gasto en la tienda i, i.i.d. e independientes de N. Gasto total $Y = X_1 + \cdots + X_N$.

Media: condicionar en N

$\mathbb{E}[Y \mid N = n] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = n\,\mathbb{E}[X]$, así que $\mathbb{E}[Y \mid N] = N\,\mathbb{E}[X]$ y

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\big[N\,\mathbb{E}[X]\big] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X].$$

Varianza: la ley de la varianza total

$\mathrm{Var}(Y \mid N) = N\,\mathrm{Var}(X)$ y $\mathrm{Var}(\mathbb{E}[Y \mid N]) = \mathrm{Var}(N\mathbb{E}[X]) = (\mathbb{E}X)^2\,\mathrm{Var}(N)$:

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[N]\ \mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2\ \mathrm{Var}(N).$$

Las dos leyes, juntas

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]]$ y $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y])$: **condiciona en lo que vuelve simple el problema**, calcula y promedia.

Con números

$\mathbb{E}[N] = 4$, $\mathrm{Var}(N) = 2$; $\mathbb{E}[X] = 20$ soles, $\mathrm{Var}(X) = 25$.

- $\mathbb{E}[Y] = 4 \cdot 20 = 80$ soles.
- $\mathrm{Var}(Y) = 4 \cdot 25 + 20^2 \cdot 2 = 100 + 800 = 900$, DE $= 30$ soles.

Casi toda la incertidumbre viene de **cuántas** tiendas se visitan, no de cuánto se gasta en cada una.

Error clásico

Tratar N como si fuera fijo e igual a su media: $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[N]\,\mathrm{Var}(X) = 100$ se queda corto por un factor 9. El segundo término es la variabilidad **entre** los distintos valores de N.

Contenido

1. Sumar variables independientes: la convolución
2. Covarianza y la varianza de una suma
3. Correlación: qué mide y qué no
4. La esperanza condicional como variable aleatoria
5. Ley de la varianza total y sumas aleatorias
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

Cómo trabajaremos los cinco problemas

El formato

Cada problema ocupa un slide casi en blanco: lo **desarrollamos juntos en la pizarra**. La solución escrita, paso a paso, se comparte al **final de la clase** (versión completa de estos slides en OneDrive): hoy, atención a la pizarra.

Los cinco problemas y la sección de teoría que usan

1. Convolución discreta y continua: **voltear, desplazar, multiplicar y sumar** (sección 1).
2. La covarianza de la multinomial: **indicadoras y varianza de una suma** (secciones 2 y 3).
3. Incorrelado no es independiente: **covarianzas y correlaciones** (secciones 2 y 3).
4. Romper un palo: $\mathbb{E}[X \mid Y]$, $\mathrm{Var}(X \mid Y)$ **y la varianza total** (secciones 4 y 5).
5. Una suma con un número aleatorio de términos: **media y varianza** (sección 5).

Antes de cada uno

Pregúntate: ¿son independientes los términos? (si no, aparecen covarianzas). ¿En qué variable conviene **condicionar** para que el resto sea fácil?

Problema 1: convolución discreta y continua

Adaptado de "Convolution calculations" (Problem Set 6, MIT 6.431x).

(a) X es uniforme en $\{0, 1, 2\}$ e Y uniforme en $\{3, 4\}$, independientes. Halla la PMF de $X + Y$ por convolución.

(b) $X \sim \text{Unif}[0, 2]$ e $Y \sim \text{Unif}[3, 4]$, independientes. Halla la densidad de $Z = X + Y$, dibújala y calcula $\mathbb{P}(Z \leq 3{,}5)$.

Problema 2: la covarianza de la multinomial

Adaptado de "Covariance of the multinomial" (Problem Set 6, MIT 6.431x). Se lanza n veces, de forma independiente, un dado justo de $k \geq 2$ caras. X_i es el número de tiros que salen en la cara i.

a. Sin hacer cuentas: ¿X_1 y X_2 están correlacionadas positiva, negativamente o nada?

b. Calcula $\text{Cov}(X_1, X_2)$ usando indicadoras de cada tiro, y el coeficiente $\rho(X_1, X_2)$.

Problema 3: incorrelado no es independiente

Adaptado de "Correlation coefficients" (Problem Set 6, MIT 6.431x).

a. X, Y, Z son incorreladas dos a dos, con $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] = 0$ y $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2] = 1$. Calcula $\rho(X - Y,\ X + Y)$, $\rho(X + Y,\ Y + Z)$ y $\rho(X,\ Y + Z)$.

b. X es uniforme en $\{-1, 0, 1\}$ e $Y = X^2$. Calcula $\mathrm{Cov}(X, Y)$. ¿Son independientes?

Problema 4: romper un palo y la varianza total

Adaptado de "Stick-breaking example" (Lecture 13, MIT 6.431x). Un palo de longitud 1 se rompe en $Y \sim \text{Unif}(0,1)$; el trozo izquierdo se vuelve a romper en X, uniforme en $(0, Y)$.

a. Escribe las variables aleatorias $\mathbb{E}[X \mid Y]$ y $\text{Var}(X \mid Y)$, y calcula $\mathbb{E}[X]$.

b. Calcula $\text{Var}(X)$ con la ley de la varianza total. ¿Qué parte es "dentro" y cuál "entre"?

Problema 5: una suma con un número aleatorio de términos

Adaptado de "Sum of a random number of r.v.'s" (Problem Set 6, MIT 6.431x; casi literal en el examen final). Se lanza una moneda justa hasta la primera cara. K es el número de lanzamientos hasta esa primera cara, **más 1** (con TTTHTH, $K = 4 + 1 = 5$). Dado K, se generan $X_1, \ldots, X_K$ uniformes en $[0, 5]$, independientes entre sí y de la moneda. Sea $X = \sum_{k=1}^{K} X_k$.

a. Calcula $\mathbb{E}[X]$.

b. Calcula $\mathrm{Var}(X)$.

Contenido

1. Sumar variables independientes: la convolución
2. Covarianza y la varianza de una suma
3. Correlación: qué mide y qué no
4. La esperanza condicional como variable aleatoria
5. Ley de la varianza total y sumas aleatorias
6. Cinco problemas para resolver juntos
7. Cierre

Resumen de la Clase 8

Lo que hay que saber hacer

1. **Convolución**: $p_Z(z) = \sum_x p_X(x) p_Y(z-x)$ y $f_Z(z) = \int f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$ para $X \perp\!\!\!\perp Y$ (voltear, desplazar, multiplicar y sumar); suma de normales independientes es normal.
2. **Covarianza**: $\operatorname{Cov} = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$, bilineal; $\operatorname{Var}(\sum X_i) = \sum \operatorname{Var} X_i + \sum_{i \neq j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$.
3. **Correlación**: $\rho = \operatorname{Cov}/(\sigma_X \sigma_Y) \in [-1, 1]$, $|\rho| = 1$ solo con relación lineal, invariante ante escala; independiente $\Rightarrow \rho = 0$, no al revés; no es causalidad.
4. $\mathbb{E}[X \mid Y]$ **es una v.a.** (función de Y) y $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[X]$.
5. **Varianza total**: $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}[\operatorname{Var}(X \mid Y)] + \operatorname{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y])$ (dentro + entre); sumas aleatorias: $\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[N] \operatorname{Var} X + (\mathbb{E}X)^2 \operatorname{Var} N$.

Errores clásicos de esta unidad

Concluir independencia a partir de $\rho = 0$ · olvidar el $2\operatorname{Cov}$ en la varianza de una suma · sumar desviaciones estándar · creer que $|\rho|$ puede pasar de 1 · tratar $\mathbb{E}[X \mid Y]$ como un número · confundir $\mathbb{E}[\operatorname{Var}(X \mid Y)]$ con $\operatorname{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y])$ · tratar N como fijo en una suma aleatoria.

Siguiente clase (Clase 9)

Unit 7: inferencia bayesiana. Con la Clase 8 se cierra el material del **Midterm 2**.

¡Gracias!

Clase 8 — Sumas de independientes, covarianza y esperanza condicional (6.431x, Unit 6)

clazoq@uni.pe · linkedin.com/in/cristian-lazo-quispe · github.com/CristianLazoQuispe

BREIT (Brescia Institute of Technology) · Aporta — Grupo Breca · en alianza con MIT IDSS

Basado en MIT 6.431x / MIT OCW RES.6-012 (Bertsekas & Tsitsiklis), CC BY-NC-SA 4.0.